Министерство образования и науки РФ
Алтайский государственный университет
Кафедра алгебры и математической логики

Симметрическая группа подстановок

Сборник индивидуальных заданий

Издательство Алтайского государственного университета
Барнаул 2013

Составители: д.ф.-м.н., проф. А.И. Будкин,
к.ф.-м.н., доц. Н.В. Баянова,
к.ф.-м.н., доц. С.А. Шахова

Рецензент: к.ф.-м.н., доц. С.В. Вараксин.

Учебное пособие содержит индивидуальные задания, предлагаемые для самостоятельного решения студентам 1-го курса математического факультета Алтайского государственного университета при изучении темы "Подстановки"в курсе алгебры.

План УМД 2013 г., п.к

Подписано в печать XX.XX.2013 г. Формат 60x90/16.
Бумага газетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. XX.
Тираж 100. Заказ .
Типография Алтайского государственного университета:
656049, Барнаул, ул. Димитрова, 66

Основные теоретические сведения

В данном разделе приведены определения, обозначения и формулировки теорем, знакомство с которыми необходимо для успешного освоения темы "Подстановки". Выполнение читателем упражнений, сформулированных по ходу изложения теоретического материала, подготовит его к решению задач из данного сборника.

Для более глубокого изучения темы следует обратиться к лекциям по курсу алгебры, читаемым авторами сборника на математическом факультете Алтайского государственного университета, и учебникам [1, 2]. Некоторые из упражнений сборника и комментарии к их решениям можно найти в [3, 4]. В [5] приведены тесты, предлагаемые студентам математического факультета для проверки уровня их знаний по данной теме.

Определение 1. *Подстановкой n-й степени называется взаимно однозначное отображение α множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ на себя.*

Подстановка обычно изображается в виде таблицы. В верхней строке расположены все элементы множества M (в произвольном порядке),а в нижней под каждым символом стоят их образы:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \ldots & \alpha(n) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через S_n множество всех подстановок степени n. Пусть $\alpha, \beta \in S_n$. Положим

$$\alpha \cdot \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \beta(\alpha(1)) & \beta(\alpha(2)) & \ldots & \beta(\alpha(n)) \end{pmatrix};$$

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) & \ldots & \alpha(n) \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. $\left\langle S_n; \cdot, ^{-1} \right\rangle$ *— группа.*

Группа S_n называется *симметрической группой степени n.*

Упражнение 1. *Доказать, что $|S_n| = n!$.*

Упражнение 2. *Зафиксируем подстановку $\sigma \in S_n$. Доказать, что отображение $S_n \to S_n$, при котором каждая подстановка α переходит в $\alpha \cdot \sigma$ является взаимно однозначным отображением группы S_n на себя.*

Определение 2. *Пусть* $\alpha \in S_n$. *Элемент* i *называется перемещаемым символом подстановки* α, *если* $\alpha(i) \neq i$. *Если* $\alpha(i) = i$, *то* i *называется неподвижным символом подстановки* α.

Определение 3. *Подстановка* $\alpha \in S_n$ *называется циклом длины* r, *если* α *содержит ровно* r *перемещаемых символов* $i_1, i_2, \ldots, i_r$, *причем* $\alpha(i_1) = i_2, \alpha(i_2) = i_3, \ldots, \alpha(i_{r-1}) = i_r, \alpha(i_r) = i_1$.

Цикл обозначается $(i_1 i_2 ... i_r)$.

Определение 4. *Цикл длины 2 называется транспозицией.*

Упражнение 3. *Имеет место следующее разложение цикла в произведение транспозиций:*

$$(i_1 i_2 ... i_r) = (i_1 i_2)(i_1 i_3)...(i_1 i_r).$$

Упражнение 4. *Проверить, что* $(i_1 i_2 ... i_r)^{-1} = (i_r i_{r-1} ... i_1)$. *В частности,* $(i_1 i_2)^{-1} = (i_1 i_2)$, $(i_1 i_2 i_3)^{-1} = (i_1 i_3 i_2)$.

Определение 5. *Циклы* α *и* β *называются независимыми, если они не содержат одинаковых перемещаемых символов.*

Упражнение 5. *Если* α, β *— независимые циклы, то они перестановочны, то есть* $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Теорема 2. *Всякая неединичная подстановка* α *из* S_n *может быть разложена в произведение попарно независимых циклов. Это разложение единственно, если не учитывать порядок сомножителей.*

Упражнение 6. *Всякая подстановка может быть разложена в произведение транспозиций.*

Упражнение 7. *Если* $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k$ *— разложение подстановки в произведение попарно независимых циклов, то для любого натурального числа* n *верно равенство* $\alpha^n = \alpha_1^n \alpha_2^n \ldots \alpha_k^n$.

Определение 6. *Порядком подстановки* α *называется наименьшее натуральное число* n, *удовлетворяющее условию* $\alpha^n = e$, *где* e *— единичная подстановка.*

Упражнение 8. *Порядок цикла совпадает с его длиной.*

Упражнение 9. *Порядок подстановки равен наименьшему общему кратному длин попарно независимых циклов в её разложении.*

Определение 7. *Декрементом подстановки α называется число $\delta(\alpha) = n - (s_1 + s_2)$, где s_1 — число циклов в разложении α в произведение попарно независимых циклов, s_2 — число неподвижных символов в α.*

Определение 8. *Подстановка называется четной, если ее декремент четен. Подстановка называется нечетной, если ее декремент нечетен.*

Упражнение 10. *Проверить, что множество подстановок*

$$A_n = \{\alpha \in S_n |\ \alpha \text{— чётная подстановка}\}$$

образует подгруппу группы S_n.

A_n называется *знакопеременной группой.*

Упражнение 11. *Доказать, что $|A_n| = \frac{n!}{2}$.*

Теорема 3. *Умножение на транспозицию меняет чётность подстановки.*

Теорема 4. *Чётность подстановки совпадает с чётностью числа транспозиций в её разложении.*

Определение 9. *Пусть $n_1, n_2, ..., n_k$ — последовательность различных натуральных чисел. Говорят, что числа n_i, n_j образуют инверсию, если $i < j$, $n_i > n_j$.*

Теорема 5. *Чётность подстановки совпадает с чётностью суммарного числа инверсий в верхней и нижней строках подстановки.*

Указание. Все подстановки, являющиеся ответами задач, рекомендуется предъявлять в виде разложения в произведение попарно независимых циклов.

Вариант 1

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix},\ \beta = (12)(341).$$
Вычислить декремент подстановки $\alpha^2\beta^{-1}$.

2. Определить наименьшее n такое, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{152}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 6 & 5 & 1 & 8 & 7 & 9 & 3 & 10 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$
$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 6 & 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

6. Декремент подстановки $\alpha = (ia\ldots bjc\ldots d)$ ($\alpha(i) \neq j$ и $\alpha(j) \neq i$) равен 25. Найти декремент $\alpha(ij)$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((123)x)^2 = (123)^2x^2$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где
$$M_1 = \{(12)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_4\},$$
$$M_2 = \{(123)x \mid x \in S_4\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

10. Выписать все подстановки x из S_4 такие, что $x^5 = e$.

Вариант 2

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 2 & 8 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ \beta = (123)(4315)(218).$$

   Вычислить декремент подстановки $\alpha^{-1}\beta^3\alpha^2$.

2. Определить наименьшее n такое, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 3 & 7 & 5 & 2 \end{pmatrix}^n = e$$

   .

3. Найти α^{2432}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 5 & 6 & 8 & 10 & 3 & 9 & 7 & 4 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где $\alpha = (341)(543)$, $\beta = (21)(735)$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 2 & 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть i — неподвижный символ подстановки $\alpha = (ja\ldots b)$, и декремент подстановки α равен 50. Найти декремент $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((132)x)^3 = (132)^3x^3$.

8. Определить число подстановок, содержащихся во множестве

$$M = \{(14)x \mid x \in S_5\} \cap \{(134)x \mid x \in S_5\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (14)$.

10. Выписать все подстановки x из S_4 такие, что $x^3 = e$.

Вариант 3

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 \end{pmatrix}, \ \beta = (3145)(781)(21).$$

   Вычислить декремент подстановки $\alpha^2\beta^{-1}$.

2. Определить наименьшее n такое, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2523}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 9 & 2 & 5 & 1 & 7 & 6 & 10 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где $\alpha = (245)(715)$, $\beta = (234)(75)$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 1 & 6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \ldots & 4n & 4n-1 & 4n-2 & 4n-3 \end{pmatrix}.$$

6. Декремент подстановки $\alpha = (ija...b)(a \neq i)$ равен 44. Найти декремент $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((32)x)^3 = (32)^3x^3$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где

$$M_1 = \{(124)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_5\},$$

$$M_2 = \{(23)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_5\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (1324)$.

10. Выписать все подстановки x из S_4 такие, что $x^2 = e$.

Вариант 4

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 3 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta = (23)(431)(526).$$
Вычислить декремент подстановки $\alpha^{-1}\beta^2$.

2. Определить наименьшее n такое, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 7 & 5 & 8 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2732}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 4 & 1 & 9 & 7 & 5 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \ \beta = (213)(73), \ \gamma = (321)(573).$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 1 & 3 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $\alpha = \alpha_1(ij)\alpha_2$ — произведение попарно независимых циклов $\alpha_1, (ij), \alpha_2$, и декремент подстановки α равен 15. Найти декремент подстановки $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((123)x)^{-1} = (123)^{-1}x^{-1}$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cup M_2$, где
$$M_1 = \{(124)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_6\},$$
$$M_2 = \{(23)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_6\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (134)$.

10. Выписать все подстановки x из S_4 такие, что $x^3 = e$.

Вариант 5

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta = (623)(542)(18).$$
Вычислить декремент подстановки $\alpha^2\beta^{-1}$.

2. Определить наименьшее n такое, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 2 & 1 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2121}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 6 & 5 & 3 & 10 & 8 & 4 & 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ \beta = (314)(53)(21), \ \gamma = (536)(47).$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 4 & 1 & 2 & 3 & \dots & 4n & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 \end{pmatrix}.$$

6. Декремент подстановки $\alpha = (ia...bjc...d)$ ($\alpha(i) \neq j$ и $\alpha(j) \neq i$) равен 27. Найти декремент $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((23)x)^{-1} = (23)^{-1}x^{-1}$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cup M_2$, где
$$M_1 = \{(12)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_5\},$$
$$M_2 = \{(23)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_5\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (34)$.

10. Выписать все подстановки x из S_5 такие, что $x^5 = e$.

Вариант 6

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки

$$\alpha = (312)(134)(783),\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

   Вычислить декремент подстановки $\alpha^3\beta^{-2}$.

2. Определить наименьшее n такое, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 7 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{241}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 1 & 4 & 8 & 6 & 5 & 3 & 7 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix},\ \beta = (12)(345),\ \gamma = (134)(571).$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \ldots & 4n-2 & 4n-3 & 4n & 4n-1 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $(ia...b)$ и $(jc...d)$ — независимые циклы, и декремент подстановки $\alpha = (ia...b)(jc...d)$ равен 15. Найти декремент подстановки $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((132)x)^3 = (132)^3x^3$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где

$$M_1 = \{(12)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_4\},$$

$$M_2 = \{(123)x \mid x \in S_4\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (13)(42)$.

10. Выписать все подстановки x из S_5 такие, что $x^6 = e$.

Вариант 7

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки
$$\alpha = (34)(452)(273),\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 7 & 2 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$
Вычислить декремент подстановки $\beta^{-3}\alpha^2$.

2. Определить наименьшее n такое, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2441}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 10 & 7 & 4 & 3 & 1 & 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix},\ \beta = (234)(75),\ \gamma = (341)(453).$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 3 & 4 & 1 & 2 & \ldots & 4n-1 & 4n & 4n-3 & 4n-2 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть i — неподвижный символ подстановки $\alpha = (ja \ldots b)$, и декремент подстановки α равен 21. Найти декремент подстановки $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((123)x)^3 = (123)^3x^3$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где
$$M_1 = \{(13)x | x - \text{нечётная подстановка из } S_5\},$$
$$M_2 = \{(12)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_5\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (142)$.

10. Выписать все подстановки x из S_5 такие, что $x^2 = e$.

Вариант 8

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 6 & 7 & 5 & 1 & 2 & 8 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \ \beta = (312)(462)(157).$$

   Вычислить декремент подстановки $\alpha^2\beta^{-2}$.

2. Определить наименьшее n такое, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 1 & 3 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2015}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 6 & 4 & 10 & 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где $\alpha = (215)(347)$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \ \gamma = (423)(15)$.

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 1 & 2 & \ldots & 3n & 3n-2 & 3n-1 \end{pmatrix}.$$

6. Декремент подстановки $\alpha = (ija...b)(a \neq i)$ равен 38. Найти декремент подстановки $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((32)x)^{-1} = (32)^{-1}x^{-1}$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где

$$M_1 = \{(132)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_6\},$$

$$M_2 = \{(123)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_6\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (1234)$.

10. Выписать все подстановки x из S_5 такие, что $x^4 = e$.

Вариант 9

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки

$$\alpha = (3412)(234)(571),\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Вычислить декремент подстановки $\alpha^{-1}\beta^3$.

2. Определить наименьшее n такое, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2136}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 4 & 7 & 1 & 9 & 3 & 8 & 6 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix},\ \beta = (45)(412),\ \gamma = (13)(475).$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & \ldots & 3n-1 & 3n & 3n-2 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $\alpha = \alpha_1(ij)\alpha_2$ — произведение попарно независимых циклов $\alpha_1, (ij), \alpha_2$, и декремент подстановки α равен 100. Найти декремент подстановки $\alpha(ij)$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((13)x)^3 = (13)^3x^3$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где

$$M_1 = \{(13)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_6\},$$

$$M_2 = \{(23)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_6\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (1342)$.

10. Выписать все подстановки x из S_5 такие, что $x^5 = e$.

Вариант 10

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ \beta = (345)(15)(23).$$

перестановочными. Вычислить декремент подстановки $\alpha^2\beta^{-3}$.

2. Определить наименьшее n такое, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2133}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 9 & 7 & 5 & 10 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где $\alpha = (341)(15)$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}, \ \gamma = (41)(257)$.

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \dots & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $\alpha = \alpha_1(ij)\alpha_2$ — произведение попарно независимых циклов $\alpha_1, (ij), \alpha_2$, и декремент подстановки α равен 56. Найти декремент подстановки $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((132)x)^2 = (132)^2x^2$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где

$$M_1 = \{(15)x | x - \text{чётная подстановка из } S_4\},$$

$$M_2 = \{(123)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_4\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (13)$.

10. Выписать все подстановки x из S_5 такие, что $x^3 = e$.

Вариант 11

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ \beta = (123)(413)(257).$$

   Вычислить декремент подстановки $\alpha^2\beta^{-1}$.

2. Определить наименьшее n такое, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 5 & 7 & 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{1454}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 5 & 2 & 7 & 3 & 9 & 10 & 1 & 6 & 8 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где $\alpha = (245)(71)$, $\beta = (123)(412)(52)$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 4 & 6 & 5 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

5. Определить чётность подстановки, вычислив а) декремент подстановки; б) число транспозиций в разложении подстановки; в) суммарное число инверсий в строках подстановки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 4n-3 & 4n-2 & 4n-1 & 4n \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \ldots & 4n & 4n-1 & 4n-2 & 4n-3 \end{pmatrix}.$$

6. Декремент подстановки $\alpha = (ia...bjc...d)$ $(\alpha(i) \neq j$, и $\alpha(j) \neq i)$ равен 20. Найти декремент $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((32)x)^{-1} = (32)^{-1}x^{-1}$.

8. Пусть $M = \{(124)x \mid x \in S_4\} \cap \{(123)x \mid x \in S_4\}$. Сколько подстановок содержится в M?

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (23)(14)$.

10. Выписать все подстановки x из S_5 такие, что $x^2 = e$.

Вариант 12

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки
$$\alpha = (324)(152)(47),\ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 7 & 2 & 1 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$
Вычислить декремент подстановки $\alpha^{-1}\beta^{-1}\alpha^2$.

2. Определить наименьшее n такое, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 4 & 2 & 7 & 3 & 1 & 2 & \end{pmatrix}^n = e$$
.

3. Найти α^{2403}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 10 & 2 & 4 & 8 & 5 & 1 & 3 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix},\ \beta = (341)(45)(72),\ \gamma = (513)(456).$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \ldots & 2n & 1 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $(ia...b)$ и $(jc...d)$ — независимые циклы, и декремент подстановки $\alpha = (ia...b)(jc...d)$ равен 16. Найти декремент подстановки $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((23)x)^3 = (23)^3x^3$.

8. Пусть $M = \{(34)x \mid x \in S_6\} \cap \{(12)x \mid x \in S_6\}$. Сколько подстановок содержится в M?

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (13)$.

10. Выписать все подстановки x из S_4 такие, что $x^6 = e$.

Вариант 13

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки
$$\alpha = (218)(72)(13245),\ \ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$
Вычислить декремент подстановки $\alpha^2\beta^{-2}$.

2. Определить наименьшее n такое, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 6 & 7 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2040}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 10 & 9 & 1 & 6 & 7 & 8 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где $\alpha = (314)(613)$, $\beta = (231)(57)$, $\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & 2n-3 & 2n-2 & 2n-1 & 2n \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots & 2n-1 & 2n & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Декремент подстановки $\alpha = (ija...b)(a \neq i)$ равен 34. Найти декремент подстановки $\alpha(ij)$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((123)x)^3 = (123)^3x^3$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где
$$M_1 = \{(12)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_6\},$$
$$M_2 = \{(123)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_6\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (13)(24)$.

10. Выписать все подстановки x из S_5 такие, что $x^6 = e$.

Вариант 14

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 6 & 1 & 2 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix},\ \beta = (742)(13)(574).$$
Вычислить декремент подстановки $\alpha^{-3}\beta^2$.

2. Определить наименьшее n такое, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{2022}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix},\ \beta = (231)(45),\ \gamma = (347)(572)(26).$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 2n-1 & 2n \\ 2 & 1 & 4 & 3 & \dots & 2n & 2n-1 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть i — неподвижный символ подстановки $\alpha = (ja\dots b)$, и декремент подстановки α равен 18. Найти декремент подстановки $\alpha(ij)$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((13)x)^{-3} = (13)^{-3}x^{-3}$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где
$$M_1 = \{(12)x \mid x - \text{нечётная подстановка из } S_4\},$$
$$M_2 = \{(123)x \mid x \in S_4\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (123)$.

10. Выписать все подстановки x из S_4 такие, что $x^4 = e$.

Вариант 15

1. Проверить, являются ли перестановочными подстановки
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \ \beta = (13)(2417).$$
Вычислить декремент подстановки $\beta^{-1}\alpha^3$.

2. Определить наименьшее n такое, что
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 1 & 2 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}^n = e.$$

3. Найти α^{12121}, если $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 4 & 5 & 7 & 9 & 8 & 10 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Найти подстановку σ из равенства $\alpha\sigma\beta = \gamma$, где
$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}, \ \beta = (231)(43), \ \gamma = (517)(72)(52).$$

5. Определить чётность подстановки, вычислив (а) декремент подстановки; (б) число транспозиций в разложении подстановки; (в) суммарное число инверсий в строках подстановки:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ 3 & 2 & 1 & \ldots & 3n & 3n-1 & 3n-2 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $(ia...b)$ и $(jc...d)$ — независимые циклы, и декремент подстановки $\alpha = (ia...b)(jc...d)$ равен 16. Найти декремент подстановки $(ij)\alpha$.

7. Выписать все подстановки x из S_3, удовлетворяющие равенству $((12)x)^{-1} = (12)^{-1}x^{-1}$.

8. Определить число подстановок во множестве $M_1 \cap M_2$, где
$$M_1 = \{(12)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_5\},$$
$$M_2 = \{(13)x \mid x - \text{чётная подстановка из } S_5\}.$$

9. Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой $\alpha = (14)(23)$.

10. Выписать все подстановки x из S_4 такие, что $x^3 = e$.

Список литературы

[1] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Основы алгебры. — М.: Физматлит, 2001.

[2] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — СПб.: Издательство "Лань 2006.

[3] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре: Учебное пособие. — СПб.: Издательство "Лань 2008.

[4] Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Задачи по высшей алгебре: Учебное пособие. — СПб.: Издательство "Лань 2008.

[5] Будкин А.И., Баянова Н.В. Тестовые задания по алгебре: Учебное пособие. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2006.