ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВПО
АЛТАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.И. Будкин, С.В. Ленюк

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

учебное пособие

Барнаул 2006

УДК 512

Рецензенты:
д.ф.-м.н., профессор, зав. каведрой высшей математики АлтГТУ А.Г. Пышнограй,
д.ф.-м.н., профессор, зав. каведрой геометрии БГПУ Е.Д. Родионов

Учебное пособие предназначено для студентов первого курса математических факультетов университетов. В пособии приводятся примеры решения типовых задач из основных разделов линейной алгебры. В пособие включены следующие темы из курса линейной алгебры: "Матрица линейного преобразования", "Ортогональные и симметрические преобразования", "Жорданова форма матрицы", "Функции от матриц", "Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных".

Подписано в печать . Формат А5.
Бумага для множительных аппаратов. Печать офсетная.
Усл. печат. л. . Усл. изд. л. . Тираж .
Алтайский государственный университет. Лаборатория множительной техники Алтайского госуниверситета: 656049, Барнаул, ул. Ленина, 61.

Оглавление

Предисловие

Цель учебного пособия — научить читателя решать типичные задачи по темам "Матрица линейного преобразования", "Ортогональные и симметрические преобразования", "Жорданова форма матрицы", "Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных". Каждой главе предшествует краткое введение, состоящее из определений и основных математических понятий. Все задачи приведены с решениями и необходимыми комментариями, некоторые задачи решены несколькими способами.

Все векторные пространства в данном учебном пособии являются векторными пространствами над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел либо над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

В главе 1 изложен общий подход к нахождению матриц линейного преобразования: исходя из определения и при помощи матрицы перехода. Рассмотрены задачи на доказательство линейной независимости системы векторов.

В главе 2 приведены понятия, относящиеся к теме "Собственные векторы линейного преобразования". Здесь подробно разбираются примеры на нахождение базисов векторного пространства, состоящих из собственных векторов данного линейного преобразования. Изложен процесс ортогонализации, рассмотрены также задачи на вычисление ортонормированных базисов евклидовых и унитарных пространств, состоящих из собственных векторов линейного преобразования. В конце главы даны примеры решения задач повышенной трудности.

В главе 3 мы объясняем, как ищется базис 2-мерного инвариантного подпространства векторного пространства над $\mathbb{R}$. Как следствие этого, находим базис, в котором данное ортогональное преобразование имеет канонический вид, и этот канонический вид.

Глава 4 посвящена вычислению жордановой формы матрицы и базиса векторного пространства над $\mathbb{C}$, в котором линейное преобразование имеет жорданову форму. Сначала мы излагаем общий метод построения такого базиса. Затем полностью и подробно рассматриваем случаи 2-мерного и 3-мерного векторных пространств. Далее, применяем указанный алгоритм для нахождения жордановой формы в произвольных векторных пространствах. Завершается этота глава примерами решения задач повышенной трудности.

В главе 5 методы, изученные ранее, применяются для вычисления значений простейших функций от матриц.

В главе 6 кратко излагается материал, относящийся к приведению квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных, а также приводятся примеры решения задач на эту тему.

Прежде чем приступить к чтению решения задачи, мы советуем попытаться решить ее самостоятельно. Сравните свое решение с приведенным.

В основу данного учебного пособия положены лекции, на протяжении многих лет читаемые авторами на математическом факультете Алтайского государственного университета. При составлении задач использовались книги [Беклемишева, Петрович, Чубаров, 1987; Икрамов, 1975; Проскуряков, 1962; Садовничий, Подколзин, 1978, Сборник задач по линейной алгебре, 1987; Фаддеев, Соминский, 1972]. Рекомендуются для изучения также учебники [Воеводин, 1974; Курош, 1963; Кострикин, 1977, Мальцев, 1975].

Глава 1

Матрица линейного преобразования

Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем P.

$$e_1,\ e_2,\ldots,e_n \tag{1.1}$$

— базис V, $\mathcal{A}:V\to V$ — линейное преобразование. Найдем координаты векторов $\mathcal{A}(e_1),\ldots,\mathcal{A}(e_n)$ в базисе (1.1):

$$\mathcal{A}(e_1)=a_{11}e_1+\ldots+a_{1n}e_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathcal{A}(e_n)=a_{n1}e_1+\ldots+a_{nn}e_n.$$

Матрица

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

называется матрицей преобразования $\mathcal{A}$ в базисе (1.1).

Напомним теперь определение матрицы перехода от базиса (1.1) к новому базису:

$$e'_1,\ e'_2,\ldots,e'_n. \tag{1.2}$$

Пусть имеет место разложение

$$e_1=\tau_{11}e'_1+\ldots+\tau_{1n}e'_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e_n=\tau_{n1}e'_1+\ldots+\tau_{nn}e'_n.$$

Матрицу

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \dots & \tau_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$$

будем называть матрицей перехода от базиса (1.1) к базису (1.2) и обозначать буквой T. Имеет место следующая теорема.

Теорема **1.1.** *В указанных обозначениях справедливо равенство $B = T^{-1}AT$, где B — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе (1.2).*

Часто требуется квадратной матрице сопоставить линейное преобразование, матрицей которого является данная матрица. Это делается так. Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица n-го порядка над полем P. Рассматриваем произвольное n-мерное векторное пространство V над полем P. Пусть (1.1) — произвольный базис V. Существует, и притом единственное, линейное преобразование (которое всегда будем обозначать через $\widetilde{\mathcal{A}}$) векторного пространства V, такое, что

$$\widetilde{\mathcal{A}}(e_1) = a_{11}e_1 + \ldots + a_{1n}e_n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}(e_n) = a_{n1}e_1 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

Матрица этого линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$ равна A.

Координатную строку вектора x в базисе $a_1, \ldots, a_n$ будем обозначать через

$$[x] = [x_1, \ldots, x_n],$$

в частности, $x = x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$. Если

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

— стандартный базис векторного пространства $\mathbb{R}^n$, то координатная строка вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равна $[x] = [x_1, \ldots, x_n]$ и поэтому вместо $[x_1, \ldots, x_n]$ пишем просто $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Векторное пространство столбцов над $\mathbb{R}$ длины n будем также обозначать через $\mathbb{R}^n$.

Пример **1.2.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в базисе a_1, a_2, a_3 имеет матрицу преобразования A. Доказать, что система векторов $a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_1 + a_2 + a_3$ образует базис данного пространства V (над $\mathbb{R}$) и найти матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе. Здесь* $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Пусть $e_1 = a_1 + a_2, e_2 = a_1 - a_2, e_3 = a_1 + a_2 + a_3$. Мы воспользуемся утверждением, что любая система из n векторов, порождающая n-мерное векторное пространство, является базисом этого пространства. Имеем: $a_3 = e_3 - e_1, a_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2), a_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$. Значит, система векторов e_1, e_2, e_3 порождает V и поэтому является базисом V. Найдем теперь матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3.

Способ 1. По определению матрицы преобразования имеем:

$$\begin{gathered} \mathcal{A}(a_1) = 3a_1 + 3a_2 + 2a_3, \\ \mathcal{A}(a_2) = a_1 + a_2 - 2a_3, \\ \mathcal{A}(a_3) = -3a_1 - a_2. \end{gathered}$$

Отсюда и из линейности $\mathcal{A}$ получаем, что

$$\mathcal{A}(e_1) = \mathcal{A}(a_1 + a_2) = \mathcal{A}(a_1) + \mathcal{A}(a_2) = (3a_1 + 3a_2 + 2a_3) +$$

$$+(a_1 + a_2 - 2a_3) = 4a_1 + 4a_2 = 4e_1 + 0e_2 + 0e_3,$$

$$\mathcal{A}(e_2) = \mathcal{A}(a_1 - a_2) = \mathcal{A}(a_1) - \mathcal{A}(a_2) = (3a_1 + 3a_2 + 2a_3) -$$

$$-(a_1 + a_2 - 2a_3) = 2a_1 + 2a_2 + 4a_3 = -2e_1 + 0e_2 + 4e_3,$$

$$\mathcal{A}(e_3) = \mathcal{A}(a_1 + a_2 + a_3) = (3a_1 + 3a_2 + 2a_3) + (a_1 + a_2 - 2a_3) +$$

$$+(-3a_1 - a_2) = a_1 + 3a_2 = 2e_1 - e_2 + 0e_3.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Замечание **1.3.** *Выражение векторов $\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3)$ через e_1, e_2, e_3 в данном случае оказалось делом нетрудным. Обычно это сводится к решению некоторых систем уравнений.*

Способ 2. Найдем матрицу T перехода от базиса a_1, a_2, a_3 к новому базису e_1, e_2, e_3. Для этого надо рассмотреть систему

$$\begin{cases} a_1 = \tau_{11}e_1 + \tau_{12}e_2 + \tau_{13}e_3 \\ a_2 = \tau_{21}e_1 + \tau_{22}e_2 + \tau_{23}e_3 \\ a_3 = \tau_{31}e_1 + \tau_{32}e_2 + \tau_{33}e_3. \end{cases}$$

Покажем только, как найти $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}$. Остальные τ_{ij} находятся аналогично. Из первого равенства вытекает, что

$$a_1 = \tau_{11}(a_1 + a_2) + \tau_{12}(a_1 - a_2) + \tau_{13}(a_1 + a_2 + a_3) \Rightarrow$$

$$(\tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} - 1)a_1 + (\tau_{11} - \tau_{12} + \tau_{13})a_2 + \tau_{13}a_3 = 0 \Rightarrow$$

(поскольку векторы a_1, a_2, a_3 линейно независимы)

$$\begin{cases} \tau_{11} + \tau_{12} + \tau_{13} - 1 = 0 \\ \tau_{11} - \tau_{12} + \tau_{13} = 0 \\ \tau_{13} = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $\tau_{11} = \frac{1}{2}, \tau_{12} = \frac{1}{2}, \tau_{13} = 0$. Аналогично, $\tau_{21} = \frac{1}{2}, \tau_{22} = -\frac{1}{2}, \tau_{23} = 0, \tau_{31} = -1, \tau_{32} = 0, \tau_{33} = 1$. Значит, $T = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ — искомая матрица. Отсюда

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что при решении этим способом проще сначала найти матрицу T^{-1} перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1, a_2, a_3, а затем — матрицу T.

Пример **1.4.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в базисе a_1, a_2, a_3 имеет матрицу преобразования A. Доказать, что система векторов $a_1 + 2a_2, a_2 + 2a_3, 2a_1 + a_3$ образует базис данного пространства V (над $\mathbb{R}$) и найти матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе. Здесь* $A = \begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 \\ -9 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение.

Пусть $e_1 = a_1 + 2a_2, e_2 = a_2 + 2a_3, e_3 = 2a_1 + a_3$. Покажем, что система векторов e_1, e_2, e_3 линейно независима. Предположим, что имеет место соотношение

$$c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 = 0.$$

Достаточно доказать, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Видим, что

$$c_1(a_1 + 2a_2) + c_2(a_2 + 2a_3) + c_3(2a_1 + a_3) = 0.$$

Отсюда

$$(c_1 + 2c_3)a_1 + (2c_1 + c_2)a_2 + (2c_2 + c_3)a_3 = 0.$$

Так как a_1, a_2, a_3 — линейно независимая система векторов, то

$$\begin{cases} c_1 + 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_2 + c_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Итак, векторы e_1, e_2, e_3 линейно независимы. Воспользуемся теперь утверждением, что любая система из n векторов образует базис n-мерного векторного пространства.

Матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1, a_2, a_3 равна

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i-я строка матрицы T^{-1} совпадает с координатной строкой вектора e_i в базисе a_1, a_2, a_3).

Несложно проверить, что

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$B = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 \\ -9 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -1 & 11 & -4 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ -1 & 11 & -4 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Пример **1.5.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в базисе $a_1 = (1,2)$, $a_2 = (2,3)$ имеет матрицу A, линейное преобразование $\mathcal{B}$ в базисе $b_1 = (3,1), b_2 = (4,2)$ имеет матрицу B. Найти матрицу преобразования $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ в базисе b_1, b_2, если*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в базисе b_1, b_2. Для этого сначала установим матрицу перехода от базиса a_1, a_2 к базису b_1, b_2. Для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_1 = \tau_{11}b_1 + \tau_{12}b_2 \\ a_2 = \tau_{21}b_1 + \tau_{22}b_2. \end{cases}$$

Из первого соотношения этой системы вытекает, что

$$(1,2) = \tau_{11}(3,1) + \tau_{12}(4,2).$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 1 = 3\tau_{11} + 4\tau_{12} \\ 2 = \tau_{11} + 2\tau_{12}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $\tau_{11} = -3, \tau_{12} = 2.5$. Аналогично, из соотношения

$$(2,3) = \tau_{21}(3,1) + \tau_{22}(4,2)$$

вытекает, что $\tau_{21} = -4, \tau_{22} = 3.5$. Итак, мы нашли матрицу перехода

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 2.5 \\ -4 & 3.5 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе b_1, b_2 есть

$$A_1 = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2.5 \\ -4 & 3.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 & -35.5 \\ 38 & -34 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица пробразования $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ в базисе b_1, b_2 равна

$$A_1 + B = \begin{pmatrix} 40 & -35.5 \\ 38 & -34 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & -29.5 \\ 44 & -25 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 34 & -29.5 \\ 44 & -25 \end{pmatrix}$.

Пример **1.6.** *Линейное преобразование* $\mathcal{A}$ *в базисе* $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ *имеет матрицу* A, *линейное преобразование* $\mathcal{B}$ *в базисе* $b_1 = (6, -7), b_2 = (-5, 6)$ *имеет матрицу* B. *Найти матрицу преобразования* $\mathcal{AB}$ *в базисе* $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицы преобразований $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ в базисе e_1, e_2. Удобно начать с вычисления матрицы перехода T_1 от базиса a_1, a_2 к базису e_1, e_2:

$$\begin{cases} a_1 = -3e_1 + 7e_2 \\ a_2 = e_1 - 2e_2 \end{cases} \Rightarrow T_1 = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрица T_2 перехода от базиса b_1, b_2 к базису e_1, e_2 находится так:

$$\begin{cases} b_1 = 6e_1 - 7e_2 \\ b_2 = -5e_1 + 6e_2 \end{cases} \Rightarrow T_2 = \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2 равна

$$A_1 = T_1^{-1} A T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица преобразования $\mathcal{B}$ в базисе e_1, e_2 равна

$$B_1 = T_2^{-1} A T_2 = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -143 & 177 \\ -122 & 151 \end{pmatrix}.$$

Найдем теперь матрицу преобразования $\mathcal{AB}$ в базисе e_1, e_2. Она равна

$$B_1 A_1 = \begin{pmatrix} -143 & 177 \\ -122 & 151 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109 & 34 \\ 93 & 29 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 109 & 34 \\ 93 & 29 \end{pmatrix}$.

Пример **1.7.** *Линейное преобразование* $\mathcal{A}$ *в базисе* $a_1 = (-1, 2)$, $a_2 = (1, -1)$ *имеет матрицу* A. *Найти матрицу преобразования* $\mathcal{A}^3$ *в базисе* $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2. Начнем с вычисления матрицы перехода T от базиса a_1, a_2 к базису e_1, e_2.

$$\begin{cases} a_1 = -e_1 + 2e_2 \\ a_2 = e_1 - e_2 \end{cases} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда матрица преобразования $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2 равна

$$B = T^{-1} A T = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица преобразования $\mathcal{A}^3$ в базисе a_1, a_2 равна

$$B^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример **1.8.** *Пусть линейное преобразование* $\mathcal{A}$ *в базисе* e_1, e_2, e_3 *имеет матрицу* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$. *Найти матрицу этого преобразования в базисе* e_3, e_2, e_1.

Решение. Из определения матрицы линейного преобразования видим, что

$$\mathcal{A}(e_1) = e_1 + 2e_2 + 3e_3,$$
$$\mathcal{A}(e_2) = -e_1 - 2e_2 - 3e_3,$$
$$\mathcal{A}(e_3) = 4e_1 - 4e_2 + 5e_3.$$

В базисе e_3, e_2, e_1 иной порядок векторов, чем в исходном. Матрица линейного преобразования зависит от порядка векторов в базисе. Перепишем равенства, учитывая новый порядок векторов:

$$\mathcal{A}(e_3) = 5e_3 - 4e_2 + 4e_1,$$
$$\mathcal{A}(e_2) = -3e_3 - 2e_2 - e_1,$$
$$\mathcal{A}(e_1) = 3e_3 + 2e_2 + e_1.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & -4 \\ -3 & -2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Замечание **1.9.** *Эта матрица получилась из исходной перестановкой 1-го и 3-го столбцов и 1-й и 3-й строк.*

Пример **1.10.** *Пусть линейное преобразование* $\mathcal{A}$ *в базисе* a_1, a_2, a_3 *имеет матрицу* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Найти образ вектора* $a = a_1 + 2a_2 - a_3$.

Решение. СПОСОБ 1.

Координатная строка вектора a в рассматриваемом базисе равна $[a] = [1, 2, -1]$. По хорошо известной теореме из курса по линейной алгебре координатная строка образа вектора a равна $[\mathcal{A}(a)] = [a]A$. Следовательно,

$$[\mathcal{A}(a)] = [1, 2, -1] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = [-2, 3, 6].$$

Значит, $\mathcal{A}(a) = -2a_1 + 3a_2 + 6a_3$.

СПОСОБ 2. Из определения матрицы линейного преобразования следует, что

$$\mathcal{A}(a_1) = a_1 + a_3,$$

$$\mathcal{A}(a_2) = 2a_1 + 2a_3,$$

$$\mathcal{A}(a_3) = 3a_1 + a_2 - a_3.$$

Пользуясь линейностью преобразования $\mathcal{A}$, находим, что

$$\mathcal{A}(a) = \mathcal{A}(a_1 + 2a_2 - a_3) = \mathcal{A}(a_1) + 2\mathcal{A}(a_2) - \mathcal{A}(a_3) =$$

$$= a_1 + a_3 + 2(2a_2 + 2a_3) - (3a_1 + a_2 - a_3) = -2a_1 + 3a_2 + 6a_3.$$

ОТВЕТ. $-2a_1 + 3a_2 + 6a_3$.

ПРИМЕР **1.11.** *Пусть* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *— линейное преобразование, которое каждому вектору* (x_1, x_2, x_3) *ставит в соответствие вектор* $(x_1 - x_2, x_1 + x_2 + x_3, x_2)$. *Найти матрицу преобразования* $\mathcal{A}$ *в стандартном базисе* $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$.

РЕШЕНИЕ. В качестве упражнения предлагаем проверить линейность данного преобразования. Вычислим образы векторов e_1, e_2, e_3 при этом преобразовании:

$$\mathcal{A}(e_1) = (1, 1, 0), \mathcal{A}(e_2) = (-1, 1, 1), \mathcal{A}(e_3) = (0, 1, 0).$$

Отсюда

$$\mathcal{A}(e_1) = e_1 + e_2 + 0e_3,$$

$$\mathcal{A}(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3,$$

$$\mathcal{A}(e_3) = 0e_1 + e_2 + 0e_3.$$

Пользуясь определением матрицы преобразования, получаем следующий ответ.

ОТВЕТ. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример **1.12.** *В пространстве квадратных матриц порядка 2 фиксирован базис, состоящий из матриц*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Записать в этом базисе матрицу преобразования, которое каждой матрице сопоставляет транспонированную.

Решение.

$$e_1' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4,$$

$$e_2' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + e_3 + 0e_4,$$

$$e_3' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0e_1 + e_2 + 0e_3 + 0e_4,$$

$$e_4' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0e_1 + 0e_2 + 0e_3 + e_4.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример **1.13.** *В пространстве квадратных матриц порядка 2 фиксирован базис, состоящий из матриц*

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Линейное преобразование $\mathcal{A}$ каждой матрице X сопоставляет матрицу $AX + XB$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4.

Решение. Доказательство линейности данного отображения мы оставим в качестве упражнения. Вычислим образы векторов e_1, e_2, e_3, e_4 при данном преобразовании:

$$\mathcal{A}(e_1) = Ae_1 + e_1B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4,$$

$$\mathcal{A}(e_2) = Ae_2 + e_2B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + 0e_3 + e_4,$$

$$\mathcal{A}(e_3) = Ae_3 + e_3B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = e_1 + 0e_2 + e_3 - e_4,$$

$$\mathcal{A}(e_4) = Ae_4 + e_4B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 0e_1 + e_2 - e_3 + e_4.$$

Пользуясь определением матрицы преобразования, получаем ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Пример **1.14.** *В пространстве квадратных матриц порядка 2 задано линейное преобразование $\mathcal{A}$, которое каждой матрице X сопоставляет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X + X \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$. Доказать, что $\mathcal{A}^3 = 0$.*

Решение. Можно для любой матрицы X непосредственно вычислить $\mathcal{A}^3(X)$ и убедиться, что получится нулевая матрица. Тем самым задача будет решена. Мы приведем другое решение, использующее матрицу преобразования.

Зафиксируем следующий базис рассматриваемого пространства:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поступаем так же, как и в примере 1.13.

Вычислим образы векторов e_1, e_2, e_3, e_4 при данном преобразовании:

$$\mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -e_1 + e_2 + e_3 + 0e_4$$

$$\mathcal{A}(e_2) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -4e_1 + e_2 + 0e_3 + 0e_4$$

$$\mathcal{A}(e_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = -e_1 + 0e_2 - 3e_3 + e_4$$

$$\mathcal{A}(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = 0e_1 - e_2 - 4e_3 + e_4$$

Пользуясь определением, находим матрицу нашего преобразования в данном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Возводим ее в куб. Получаем, что $A^3 = 0$. Так как матрица линейного преобразования $\mathcal{A}^3$ равна A^3, то видим, что $\mathcal{A}^3$ — нулевое преобразование.

Пример **1.15.** *В базисе $1, t, t^2$ пространства многочленов над $\mathbb{R}$ степени ≤ 2 линейное преобразование $\mathcal{A}$ задано матрицей*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу этого преобразования в базисе

$$e_1' = 3t^2 + 2t,\ e_2' = 5t^2 + 3t + 1,\ e_3' = 7t^2 + 5t + 3.$$

Решение. Матрица перехода от базиса e_1', e_2', e_3' к базису $1, t, t^2$ есть

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Отсюда искомая матрица равна

$$T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 2 & -\frac{9}{4} & \frac{3}{4} \\ -1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{15}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример **1.16**. *Множество*

$$\{c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$$

функций образует векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Доказать, что векторы* $1, \sin x, \cos x$ *линейно независимы, и в этом базисе найти матрицу линейного преобразования, которое каждой функции сопоставляет ее производную.*

Решение. Докажем сначала линейную независимость этих векторов. Предположим, что

$$c_1 + c_2 \sin x + c_3 \cos x = 0.$$

Это равенство справедливо при любых значениях x. Подставим вместо x числа $0, \frac{\pi}{2}, \pi$. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 - c_3 = 0. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Значит, данная система векторов линейно независима и поэтому образует базис рассматриваемого векторного пространства.

Обозначим через $\mathcal{A}$ данное линейное преобразование, т.е. $\mathcal{A}(f) = f'$ — производная функции f. Тогда

$$\mathcal{A}(1) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \sin x + 0 \cdot \cos x,$$

$$\mathcal{A}(\sin x) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot \sin x + \cos x,$$

$$\mathcal{A}(\cos x) = 0 \cdot 1 - \sin x + 0 \cdot \cos x.$$

Исходя из определения матрицы преобразования, находим ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример **1.17**. *Множество*

$$\{c_1 \sin^2 x + c_2 \sin x \cos x + c_3 \cos^2 x \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$$

функций образует векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Доказать, что векторы* $\sin^2 x, \sin x \cos x, \cos^2 x$ *линейно независимы, и в этом базисе найти матрицу линейного преобразования, которое каждой функции сопоставляет ее производную.*

Решение. Докажем сначала линейную независимость этих векторов. Пусть

$$c_1 \sin^2 x + c_2 \sin x \cos x + c_3 \cos^2 x = 0.$$

Это равенство справедливо при любых значениях x. Подставим вместо x числа $0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$. Получим, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Значит, данная система векторов является линейно независимой и поэтому образует базис рассматриваемого векторного пространства.

Пусть $\mathcal{A}$ — наше линейное преобразование, т.е. $\mathcal{A}(f) = f'$ — производная функции f. Тогда

$$\mathcal{A}(\sin^2 x) = (\sin^2 x)' = 0 \cdot \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + 0 \cdot \cos^2 x,$$

$$\mathcal{A}(\sin x \cos x) = (\sin x \cos x)' = -\sin^2 x + 0 \cdot \sin x \cos x + \cos^2 x,$$

$$\mathcal{A}(\cos^2 x) = (\cos^2 x)' = 0 \cdot \sin^2 x - 2 \sin x \cos x + 0 \cdot \cos^2 x.$$

Исходя из определения матрицы преобразования, получаем ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример **1.18**. *Множество*

$$V = \{c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{2x} \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$$

функций образует векторное пространство над $\mathbb{R}$. *Доказать, что векторы* $1, e^x, e^{2x}$ *образуют базис* V, *и в этом базисе найти матрицу линейного преобразования, которое каждой функции сопоставляет ее производную.*

Решение. Докажем сначала линейную независимость этих векторов. Пусть
$$c_1 + c_2e^x + c_3e^{2x} = 0.$$
Это равенство справедливо при любых значениях x. Подставим вместо x числа $0, \ln 2, \ln 3$. Получим следующую систему уравнений:
$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 = 0 \\ c_1 + 3c_2 + 9c_3 = 0. \end{cases}$$
Из этой системы находим, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Значит, данная система векторов линейно независима и поэтому образует базис рассматриваемого векторного пространства.

Пусть $\mathcal{A}$ — наше линейное преобразование, т.е. $\mathcal{A}(f) = f'$ — производная функции f. Тогда
$$\mathcal{A}(1) = (1)' = 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^x + 0 \cdot e^{2x},$$
$$\mathcal{A}(e^x) = (e^x)' = 0 \cdot 1 + e^x + 0 \cdot e^{2x},$$
$$\mathcal{A}(e^{2x}) = (e^{2x})' = 0 \cdot 1 + 0 \cdot e^x + 2e^{2x}.$$
Исходя из определения матрицы преобразования, получаем ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Глава 2

Базис из собственных векторов

Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ — линейное преобразование векторного пространства V над полем P. Элемент k, принадлежащий полю P, называется собственным значением линейного преобразования $\mathcal{A}$, если существует ненулевой вектор $a \in V$, такой, что

$$\mathcal{A}(a) = ka.$$

Всякий ненулевой вектор a, удовлетворяющий этому равенству, называется собственным вектором, принадлежащим собственному значению k.

Пусть A — матрица данного линейного преобразования $\mathcal{A} : V \to V$ в некотором базисе. Тогда многочлен $f(\lambda) = \mid A - \lambda E \mid$ называется характеристическим многочленом преобразования $\mathcal{A}$. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса векторного пространства V.

Следующая теорема дает способ нахождения собственных значений, а её доказательство указывает метод построения собственных векторов.

Теорема **2.1.** *Элемент k из поля P является собственным значением линейного преобразования тогда и только тогда, когда k является корнем характеристического многочлена этого линейного преобразования.*

Отметим, что иногда говорят о собственных значениях, собственных векторах, характеристическом многочлене матрицы A. Это в точности собственные значения, собственные вектора, характеристический многочлен преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$, введенного в главе 1.

Существует способ, позволяющий из любого базиса евклидова пространства получить ортогональный базис этого пространства. Это процесс ортогонализации. Напомним, в чем он состоит.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — линейно независимая система векторов евклидова пространства. Полагаем $e_1 = a_1$. Предположим, что для некоторого k попарно ортогональные векторы $e_1, \ldots, e_k$ уже построены. Тогда вектор e_{k+1} имеет вид:

$$e_{k+1} = c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k + a_{k+1},$$

где $c_1, \ldots, c_k$ находятся из условия

$$(e_{k+1}, e_1) = 0, \ \ldots, \ (e_{k+1}, e_k) = 0,$$

т.е.

$$c_1 = -\frac{(a_{k+1}, e_1)}{(e_1, e_1)}, \ \ldots, \ c_k = -\frac{(a_{k+1}, e_k)}{(e_k, e_k)}.$$

Пример **2.2.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ в базисе*

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$$

имеет матрицу A. Построить ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^3$ из собственных векторов и найти матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем собственные значения преобразования $\mathcal{A}$. Это корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$.

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = 0 \Leftrightarrow (\lambda+1)^2(-\lambda+5) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 5.$

Найдем собственные вектора, относящиеся к собственному значению $\lambda_1 = -1$. Для этого достаточно найти базис пространства решений системы уравнений:

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

Следовательно, $a_1 = (1,-1,0), a_2 = (1,0,-1)$ — базис пространства, натянутого на собственные вектора, относящиеся к -1. Включим теперь процесс ортогонализации, чтобы найти ортогональный базис этого пространства. Полагаем

$$e_1 = a_1, \quad e_2 = c_1 e_1 + a_2, \quad c_1 = -\frac{(a_2, e_1)}{(e_1, e_1)} = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$$e_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1).$$

Нормируем векторы e_1, e_2:

$$e_1' = \frac{1}{|e_1|}e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0),$$

$$e_2' = \frac{1}{|e_2|}e_2 = \frac{1}{\sqrt{1.5}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1) = (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}),$$

где e_1', e_2' — часть искомого ортонормированного базиса.

Найдем собственный вектор, относящийся к собственному значению $\lambda_2 = 5$. Для этого надо решить систему уравнений:

$$(x_1, x_2, x_3)(A - 5E) = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2\\ 2 & -4 & 2\\ 2 & 2 & -4\end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}-4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0\\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ $a_3 = (1,1,1)$ — базис пространства решений этой системы, a_3 — собственный вектор. Нормируем его:

$$e_3' = \frac{1}{|a_3|}a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Итак, e'_1, e'_2, e'_3 — искомый базис из собственных векторов. Поскольку в базисе из собственных векторов матрица преобразования диагональная, причем на диагонали стоят собственные значения, то теперь легко выписать ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Замечание **2.3.** *Вектор a_3 можно найти иначе. Поскольку преобразование $\mathcal{A}$ симметрическое, то мы знаем, что ортонормированный базис из собственных векторов существует. Поэтому третий собственный вектор $a_3 = (x_1, x_2, x_3)$ должен быть ортогонален векторам a_1, a_2. Условие ортогональности можно записать в виде системы уравнений:*

$$\begin{array}{l} (a_3, a_1) = 0 \\ (a_3, a_2) = 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \; -x_2 \; = 0 \\ x_1 \; -x_3 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда вектор a_3 легко находится.

Пример **2.4.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ векторного пространства V над $\mathbb{R}$ в базисе a_1, a_2, a_3, a_4 имеет матрицу A. Найти базис, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$, и матрицу преобразования в этом базисе, где*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. $|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0 \quad \Rightarrow$

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 2,\ \lambda_4 = 3$ — собственные значения. Найдем собственные векторы, относящиеся к λ_i. $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, — так будем обозначать координатную строку в базисе a_1, a_2, a_3, a_4.

1) $\lambda_1 = 1$. $[x_1, x_2, x_3, x_4](A - E) = [0, 0, 0, 0] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{c} [1, 1, -6, 2]- \\ \text{базис пространства} \\ \text{решений этой системы} \end{array}$$

$\Leftrightarrow e_1 = a_1 + a_2 - 6a_3 + 2a_4$ — собственный вектор.

2) $\lambda_2 = -1$. $[x_1, x_2, x_3, x_4](A + E) = [0, 0, 0, 0] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x_1 & & & & = 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & +3x_3 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} [0, 1, -1, 0] - \\ \text{базис пространства} \\ \text{решений этой системы} \end{matrix}$$

$\Leftrightarrow e_2 = a_2 - a_3$ — собственный вектор.

3) $\lambda_3 = 2$. $[x_1, x_2, x_3, x_4](A - 2E) = [0, 0, 0, 0] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x_1 & & & & = 0 \\ 2x_1 & -3x_2 & & & = 0 \\ 3x_1 & -3x_2 & & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$[0, 0, 1, -1] -$ базис пространства решений этой системы $\Leftrightarrow e_3 = a_3 - a_4$ — собственный вектор.

4) $\lambda_4 = 3$. $[x_1, x_2, x_3, x_4](A - 3E) = [0, 0, 0, 0] \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -2x_1 & & & = 0 \\ 2x_1 & -4x_2 & & = 0 \\ 3x_1 & +3x_2 & -x_3 & = 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$[0, 0, 0, 1] -$ базис пространства решений этой системы $\Leftrightarrow e_4 = a_4$ — собственный вектор.

Матрица преобразования в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 из собственных векторов диагональная и равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Замечание **2.5**. *Здесь мы воспользовались тем, что собственные векторы, относящиеся к различным собственным значениям, линейно независимы. Отсюда получили, что векторы e_1, e_2, e_3, e_4 линейно независимы и образуют базис.*

Пример **2.6**. *В базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ унитарного пространства $\mathbb{C}^3$ линейное преобразование $\mathcal{A}$ имеет матрицу A. Найти базис пространства $\mathbb{C}^3$ из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$ и матрицу преобразования в этом базисе, где* $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем собственные значения преобразования A. $|A - \lambda E| = 0 \quad \Leftrightarrow$
$-\lambda^3 - 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3i, \lambda_3 = -3i$ — собственные значения. Найдем собственные векторы, относящиеся к λ_k.

1) $\lambda_1 = 0$. $(x_1, x_2, x_3)A = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \quad -2x_2 \quad -x_3 = 0 \\ 2x_1 \qquad +2x_3 = 0 \\ x_1 \quad -2x_2 \qquad = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} e_1' = (2, 1, -2)- \\ \text{собственный вектор.} \end{matrix}$$

2) $\lambda_2 = 3i$. $(x_1, x_2, x_3)(A - 3iE) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -3ix_1 \quad -2x_2 \quad -x_3 = 0 \\ 2x_1 \quad -3ix_2 \quad +2x_3 = 0 \\ x_1 \quad -2x_2 \quad -3ix_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \quad -2x_2 \quad -3ix_3 = 0 \\ \quad (2 + 6i)x_2 \quad -8x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$e_2' = (-2 + 6i, 8, 2 + 6i)$ — собственный вектор.

3) $\lambda_3 = -3i$. $(x_1, x_2, x_3)(A + 3iE) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3ix_1 \quad -2x_2 \quad -x_3 = 0 \\ 2x_1 \quad +3ix_2 \quad +2x_3 = 0 \\ x_1 \quad -2x_2 \quad +3ix_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Rightarrow e_3' = (-2 - 6i, 8, 2 - 6i) \\ \text{— собственный вектор.} \end{matrix}$$

Итак, e_1', e_2', e_3' — искомый базис из собственных векторов. (Упражнение. Доказать, что векторы e_1', e_2', e_3' линейно независимы.) Матрица преобразования в этом базисе диагональная, причем на диагонали стоят собственные значения. Значит, матрица преобразования в этом базисе равна

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3i & 0 \\ 0 & 0 & -3i \end{pmatrix}.$$

Пример **2.7**. *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ в базисе*

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

имеет матрицу A. Проверить, что векторы $a_1 = (1, -2, 1, 3)$, $a_2 = (2, 1, -3, 1)$ *ортогональны, дополнить их до ортогонального базиса* *пространства* $\mathbb{R}^4$ *и найти матрицу преобразования* $\mathcal{A}$ *в этом базисе.* *Здесь* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Скалярное произведение (a_1, a_2) равно 0, следовательно, векторы a_1, a_2 ортогональны. Рассмотрим теперь систему векторов $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4$ и применим к ней процесс ортогонализации. Напомним, что в результате этого процесса получим систему векторов, порождающую то же пространство, что и векторы $a_1, a_2, e_1, e_2, e_3, e_4$, т.е. $\mathbb{R}^4$. Кроме того, если в результате процесса ортогонализации возникают нулевые векторы, то их нужно выбрасывать. Поскольку векторы a_1, a_2 ортогональны, то первые два вектора, возникающие в процессе ортогонализации, равны соответственно a_1, a_2.

Итак, $b_1 = a_1, b_2 = a_2$. Ищем b_3 в виде $b_3 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + e_1$, где $c_1 = -\frac{(e_1,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{1}{15}, c_2 = -\frac{(e_1,b_2)}{(b_2,b_2)} = -\frac{2}{15}$. Следовательно, $b_3 = (\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Вектор b_4 ищем в виде $b_4 = x_1 b_1 + x_2 b_2 + x_3 b_3 + e_2$, где $x_1 = -\frac{(e_2,b_1)}{(b_1,b_1)} = \frac{2}{15}, x_2 = -\frac{1}{15}, x_3 = 0$. Следовательно, $b_4 = (0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Мы нашли четыре ненулевых попарно ортогональных вектора b_1, b_2, b_3, b_4. Они линейно независимы и поэтому образуют базис пространства $\mathbb{R}^4$. На этом процесс ортогонализации следует закончить. (Замечание. Если процесс ортогонализации продолжить, то он будет выдавать только нулевые векторы.)

В качестве искомого возьмем следующий базис пространства $\mathbb{R}^4$:

$$e'_1 = b_1 = (1, -2, 1, 3), e'_2 = b_2 = (2, 1, -3, 1),$$

$$e'_3 = 3b_3 = (2, 0, 1, -1), e'_4 = 3b_4 = (0, 2, 1, 1).$$

Чтобы найти требуемую матрицу B, достаточно отыскать матрицу T перехода от базиса e_1, e_2, e_3, e_4 к базису e'_1, e'_2, e'_3, e'_4. Тогда $B = T^{-1}AT$. Но это очень громоздко. Мы поступим иначе. Найдем, исходя из определения матрицы преобразования, первую строку матрицы B.

$$\mathcal{A}(e'_1) = (1, -2, 1, 3)A = (3, 0, 0, 0).$$

Теперь надо найти координаты вектора $(3, 0, 0, 0)$ в базисе

$$e'_1, e'_2, e'_3, e'_4.$$

$$(3,0,0,0)=x_1(1,-2,1,3)+x_2(2,1,-3,1)+$$

$$+x_3(2,0,1,-1)+x_4(0,2,1,1)\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & =3\\ -2x_1 & +x_2 & & +2x_4 & =0\\ x_1 & -3x_2 & +x_3 & +x_4 & =0\\ 3x_1 & +x_2 & -x_3 & +x_4 & =0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & =3\\ & 5x_2 & +4x_3 & +2x_4 & =6\\ & -5x_2 & -x_3 & +x_4 & =-3\\ & -5x_2 & -7x_3 & +x_4 & =-9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & =3\\ & 5x_2 & +4x_3 & +2x_4 & =6\\ & & 3x_3 & +3x_4 & =3\\ & & -3x_3 & +3x_4 & =-3\end{cases}\Leftrightarrow (x_1,x_2,x_3,x_4)=(\frac{1}{5},\frac{2}{5},1,0).$$

Это первая строка матрицы B. Аналогичным способом можно найти остальные строки матрицы B. Но мы снова поступим иначе.

Поскольку ранг матрицы A равен 1, то ранг матрицы B также равен 1. Следовательно, строки матрицы B пропорциональны, и она имеет вид

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0\\ \frac{1}{5}y & \frac{2}{5}y & y & 0\\ \frac{1}{5}z & \frac{2}{5}z & z & 0\\ \frac{1}{5}u & \frac{2}{5}u & u & 0\end{pmatrix}.$$

Имеем: $\mathcal{A}(e_2')=(2,1,-3,1)A=(1,0,0,0)$. Но, с другой стороны, по определению матрицы B $\mathcal{A}(e_2')=\frac{1}{5}ye_1'+\frac{2}{5}ye_2'+ye_3'+0e_4'$. Значит,

$$(1,0,0,0)=\frac{1}{5}y(1,-2,1,3)+\frac{2}{5}y(2,1,-3,1)+y(2,0,1,-1).$$

Отсюда, $y = \frac{1}{3}$. Аналогично получаем $z = \frac{2}{3}, u = \frac{4}{3}$. Таким образом,

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 1 & 0 \\ \frac{1}{15} & \frac{2}{15} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{15} & \frac{4}{15} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{4}{15} & \frac{8}{15} & \frac{4}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример **2.8.** *Преобразование $\mathcal{A}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ в базисе*

$$e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$$

имеет матрицу A. Найти ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^4$ из собственных векторов и матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Здесь $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычислим собственные значения.
$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^3(\lambda + 1) = 0$
(так как $|A - \lambda E| = (\lambda - 1)^3(\lambda + 1)) \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ — собственные значения. Найдем собственные векторы, относящиеся к λ_i.

1) $\lambda_1 = 1$. $(x_1, x_2, x_3, x_4)(A - E) = (0,0,0,0) \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_1 = (1,1,0,0),\ a_2 = (1,0,1,0),\ a_3 = (1,0,0,1)$$

— базис пространства решений. Включим процесс ортогонализации для того, чтобы найти ортогональный базис этого пространства решений. Полагаем $b_1 = a_1$. Тогда

$$b_2 = c_1 b_1 + a_2,\ \text{где } c_1 = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0).$$

$$b_3 = x_1 b_1 + x_2 b_2 + a_3,\ \text{где } x_1 = -\frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow b_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$.

Таким образом, мы нашли попарно ортогональные векторы b_1, b_2, b_3, относящиеся к собственному значению 1.

2) $\lambda_1 = -1$. $(x_1, x_2, x_3, x_4)(A - E) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & +\frac{1}{2}x_4 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & +\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & -\frac{1}{2}x_2 & +\frac{3}{2}x_3 & -\frac{1}{2}x_4 & = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow b_4 = (-1, 1, 1, 1)$ — собственный вектор, относящийся к собственному значению –1.

Итак, b_1, b_2, b_3, b_4 — ортогональный базис из собственных векторов. Нормируем эти векторы, получим

$$e'_1 = \frac{1}{|b_1|}b_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0),$$

$$e'_2 = \frac{1}{|b_2|}b_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0),$$

$$e'_3 = \frac{1}{|b_3|}b_3 = (\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}),$$

$$e'_4 = \frac{1}{|b_4|}b_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}).$$

Таким образом, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 — искомый ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе диагональная, причем на диагонали стоят собственные значения, т.е.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Пример **2.9.** *Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу B в этом базисе для линейного преобразования, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей*

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ 0 & 9-\lambda & 18-2\lambda \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

$= (9-\lambda)^2(27-\lambda)$. Считаем, что стартуем от базиса

$$(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1).$$

$\lambda = 9$. $(x_1,x_2,x_3)(A-9E) = (0,0,0) \Leftrightarrow$

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow$$

$a_1 = (1,1,0), a_2 = (1,0,-2)$ — базис пространства решений этой системы уравнений. Применим процесс ортогонализации.

$$b_1 = a_1, b_2 = a_2 + cb_1, 0 = (b_2, b_1) = (a_2, a_1) + c(a_1, a_1) \Leftrightarrow$$

$$c = -\frac{(a_2,a_1)}{(a_1,a_1)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow b_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -2).\ |a_1| = \sqrt{2}, |b_2| = \sqrt{4.5}$$

$$\Rightarrow e_1' = \frac{1}{|a_1|}a_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), e_2' = \frac{1}{|b_2|}b_2 = (\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{4}{3\sqrt{2}})$$

— часть ортонормированного базиса.

Найдем собственный вектор, относящийся к $\lambda = 27$.

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -10x_1 & -8x_2 & +4x_3 & = 0 \\ 4x_1 & -4x_2 & -16x_3 & = 0. \end{cases}$$

Отсюда $e_3' = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ — собственный вектор длины 1. Итак, e_1', e_2', e_3' — ортонормированный базис из собственных векторов. Матрица преобразования в этом базисе диагональная, причем на диагонали стоят собственные значения. Значит,

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}.$$

Пример **2.10**. *При каком значении α число 0 является собственным значением для матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -3 \\ \alpha & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}$? *При найденном α найти максимальную линейно независимую систему из собственных векторов.*

Решение. Число 0 является собственным значением для матрицы A тогда и только тогда, когда 0 — корень характеристического многочлена $\mid A - \lambda E \mid$. Но $\mid A - 0 \cdot E \mid = 0 \Leftrightarrow \mid A \mid = 0$. Так как $\mid A \mid = -9(\alpha - 1)^2$, то $\alpha = 1$.

При $\alpha = 1$ найдем теперь максимальную линейно независимую систему из собственных векторов линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$, введенного в главе 1. Для этого вычислим все собственные значения $\widetilde{\mathcal{A}}$. В этом случае

$$\mid A - \lambda E \mid = \lambda^2(11 - \lambda),$$

поэтому 0 и 11 — искомые собственные значения. Найдем максимальную линейно независимую систему из собственных векторов, относящихся к собственному значению 0. Достаточно найти базис пространства решений системы уравнений $(x_1, x_2, x_3)A = 0$. Имеем:

$$(x_1, x_2, x_3)A = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow x_1 + x_2 - 3x_3 = 0.$$

Следовательно, в качестве искомого базиса можно взять следующую систему векторов:

$$a_1 = (3, 0, 1), a_2 = (0, 3, 1).$$

Найдем теперь максимальную линейно независимую систему из собственных векторов, относящихся к собственному значению 11. Она совпадает с базисом пространства решений системы уравнений $(x_1, x_2, x_3)(A - 11 \cdot E) = 0$. Имеем:

$$(x_1, x_2, x_3)(A - 11 \cdot E) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & -10 & -3 \\ 1 & -10 & -3 \\ -3 & -3 & -2 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -10x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 - 10x_2 - 3x_3 = 0 \\ -3x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Несложно проверить, что $a_3 = (1, 1, -3)$ — базис пространства решений этой системы.

Объединение максимальных линейно независимых систем векторов, относящихся к различным собственным значениям, будет искомой максимальной линейно независимой системой векторов. В частности, в данной задаче мы нашли базис $\mathbb{R}^3$, состоящий из собственных векторов линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Ответ. $a_1 = (3,0,1), a_2 = (0,3,1), a_3 = (1,1,-3)$.

Заметим, что можно было начинать решение этой задачи с вычисления характеристического многочлена $\mid A - \lambda E \mid$ при произвольном α.

Пример **2.11.** *При каких значениях* α *вектор* $(-3,0,1)$ *является собственным для матрицы* $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ \alpha & 3 & \alpha \\ -3 & 6 & -4 \end{pmatrix}$?

Решение. Заметим, что вектор $(-3,0,1)$ является собственным для матрицы A тогда и только тогда, когда найдется число λ (λ — это и есть собственное значение), такое, что система уравнений $(-3,0,1)(A-\lambda E) = 0$ совместна (т.е. имеет решения). Итак, нам необходимо исследовать на совместность эту систему уравнений. Видим:

$$(-3,0,1)(A-\lambda E) = 0 \Leftrightarrow (-3,0,1)\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 2 & -1 \\ \alpha & 3-\lambda & \alpha \\ -3 & 6 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3(\alpha-\lambda) - 3 = 0 \\ -6+6 = 0 \\ -3-4-\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\lambda - 3\alpha - 3 = 0 \\ \lambda + 1 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда $\lambda = -1$, при этом λ рассматриваемая система уравнений совместна, и $\alpha = -2$.

Ответ. $\alpha = -2$.

Пример **2.12.** *В базисе* $e_1 = (1,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0), e_3 = (0,0,1,0), e_4 = (0,0,0,1)$ *векторного пространства* $\mathbb{C}^4$ *линейное преобразование* $\mathcal{A}$ *имеет матрицу* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Найти базис пространства* $\mathbb{C}^4$ *из собственных векторов преобразования* $\mathcal{A}$.

Решение. Находим характеристический многочлен $A - \lambda E$: $\mid A - \lambda E \mid = (\lambda - 1)^4$. Следовательно, -1 — единственное собственное значение линейного преобразования $\mathcal{A}$. Базис данного векторного пространства из собственных векторов линейного преобразования $\mathcal{A}$ совпадает с базисом пространства решений системы уравнений

$$(x_1, x_2, x_3, x_4)(A - E) = (0, 0, 0, 0).$$

Поскольку ранг матрицы $A - E$ равен 3, то пространство решений этой системы уравнений является одномерным. Значит, в пространстве $\mathbb{C}^4$ не существует базиса из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$.

Приведенный пример показывает, что даже в случае очень простой матрицы преобразования данное векторное пространство может не иметь базиса из собственных векторов этого преобразования.

Пример **2.13.** *Множество*

$$V = \{c_1 e^x + c_2 e^{-x} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

функций образует векторное пространство. Линейное преобразование $\mathcal{A} : V \to V$ *задано следующим образом:*

$$\mathcal{A}(c_1 e^x + c_2 e^{-x}) = c_2 e^x + c_1 e^{-x}.$$

Найти базис векторного пространства V*, состоящий из собственных векторов преобразования* $\mathcal{A}$*, и матрицу этого преобразования в найденном базисе.*

Ответ. Мы сначала найдем какой-нибудь базис V и матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе. Для этого покажем, что векторы e^x и e^{-x} линейно независимы. Предположим, что

$$c_1 e^x + c_2 e^{-x} = 0.$$

Это равенство справедливо для всех значений x. Подставляем в него вместо x числа $0, \ln 2$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 2c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $c_1 = c_2 = 0$. Это означает, что векторы e^x, e^{-x} линейно независимы и поэтому образуют базис V.

Так как

$$\mathcal{A}(e^x) = e^{-x},$$

$$\mathcal{A}(e^{-x}) = e^x,$$

то матрица рассматриваемого преобразования в базисе e^x, e^{-x} равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда характеристический многочлен преобразования $\mathcal{A}$ равен $| A - \lambda E | = \lambda^2 - 1$, следовательно, его корни равны $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

Через $[x_1, x_2]$ будем обозначать координатную строку вектора $x_1 e^x + x_2 e^{-x}$ в базисе e^x, e^{-x}.

Координаты собственного вектора, относящегося к $\lambda_1 = 1$, являются решениями системы уравнений

$$[x_1, x_2](A - E) = [0, 0].$$

Так как $[1, 1]$ — решение этой системы уравнений, то $a_1 = e^x + e^{-x}$ — собственный вектор.

Координаты собственного вектора, относящегося к $\lambda_1 = -1$, являются решениями системы уравнений

$$[x_1, x_2](A + E) = [0, 0].$$

Так как $[1, -1]$ — решение этой системы уравнений, то $a_2 = e^x - e^{-x}$ — собственный вектор.

Таким образом, a_1, a_2 — базис из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. Матрица этого преобразования в базисе из собственных векторов диагональная с собственными значениями, стоящими на главной диагонали. Получаем ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Пример **2.14.** *Вычислить* A^{100}*, где* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ. Вычисляем характеристический многочлен и находим собственные значения: $|A-\lambda E| = (1+\lambda)^2(3-\lambda)$. Строим базис $\mathbb{R}^3$ из собственных векторов линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$, введенного в главе 1. Предполагаем, что в стандартном базисе

$$e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$$

матрица A является матрицей преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Берем собственное значение $\lambda = -1$. Часть искомого базиса — это базис пространства решений системы уравнений $(x_1,x_2,x_3)(A+E) = (0,0,0)$. Решая эту систему, получаем, что в качестве базиса пространства ее решений можно взять векторы $v_1 = (3,0,1)$, $v_2 = (1,1,0)$.

Рассматриваем теперь собственное значение $\lambda = 3$. Нужно найти базис пространства решений системы уравнений $(x_1,x_2,x_3)(A-3E) = (0,0,0)$. Несложные вычисления показывают, что в качестве искомого базиса можно выбрать вектор $v_3 = (1,-1,2)$.

В качестве базиса из собственных векторов всего пространства можно взять вектора v_1, v_2, v_3. Матрица преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$ в этом базисе равна $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Вычисляем матрицу перехода T от базиса e_1, e_2, e_3 к базису v_1, v_2, v_3. Сначала находим T^{-1}: $T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Теперь видим, что $T = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Так как $A = TBT^{-1}$ и $(TBT^{-1})^n = TB^nT^{-1}$, то $A^{100} = T^{-1}B^{100}T$. Отсюда

$$A^{100} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & 1 \\ -2 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & & 3^{100} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Теперь несложно получить ответ.

Ответ. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5-3^{100} & -1+3^{100} & 2-2\cdot 3^{100} \\ -1+3^{100} & 5-3^{100} & -2+2\cdot 3^{100} \\ -3+3^{101} & 3+3^{101} & -2+2\cdot 3^{101} \end{pmatrix}$.

Приведем примеры решения более сложных задач и задач из студенческих олимпиад [Садовничий, Подколзин, 1978].

Пример **2.15.** *Найти предел*

$$A(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Решение. Положим: $A = A(1)$. Видим, что

$$| A - \lambda E |= (\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{1}{3} - \lambda)(\frac{1}{5} - \lambda),$$

поэтому линейное преобразование $\widetilde{\mathcal{A}}$, введенное в главе 1, обладает базисом из собственных векторов данного преобразования, причем в этом базисе матрица линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$ — диагональная с собственными значениями $\widetilde{\mathcal{A}}$, стоящими на диагонали. Значит, существует матрица T, такая, что

$$A = T\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Отсюда

$$A^n = T\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}^n T^{-1} = T\begin{pmatrix} (\frac{1}{2})^n & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{3})^n & 0 \\ 0 & 0 & (\frac{1}{5})^n \end{pmatrix} T^{-1}.$$

Так как $\frac{1}{2^n} \to 0$, $\frac{1}{3^n} \to 0$, $\frac{1}{5^n} \to 0$ при $n \to \infty$, видим, что искомый предел — это нулевая матрица.

Ответ. Нулевая матрица.

Пример **2.16.** *Пусть* $A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n = (a_{ij}(n))$. *Доказать, что существует предел отношения* $\frac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)}$, *и вычислить этот предел при* $n \to \infty$.

Решение. Сначала мы вычислим $a_{12}(n)$ и $a_{22}(n)$. Для этого заметим, что линейное преобразование $\widetilde{\mathcal{A}}$, введенное в главе 1, в базисе $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ двухмерного евклидова векторного пространства $\mathbb{R}^2$ имеет матрицу преобразования, равную A. Так как $| A - \lambda E | = \lambda^2 - 2\lambda - 1$, то собственные значения $\widetilde{\mathcal{A}}$ равны $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Найдем теперь ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^2$ из собственных векторов $\widetilde{\mathcal{A}}$. Как мы знаем, необходимо найти базисы пространств решений следующих систем уравнений:

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1-\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0, (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 \\ 1 & -1+\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0.$$

Решая эти системы уравнений, находим, что в качестве искомого базиса из собственных векторов можно взять следующий базис: $e_1' = (y_1, y_2)$, $e_2' = (z_1, z_2)$,
где $y_1 = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$, $y_2 = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$, $z_1 = \frac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$, $z_2 = \frac{-\sqrt{2}-1}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$. Матрица T^{-1} перехода от базиса e_1, e_2 к базису e_1', e_2' равна $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}$, поэтому она ортогональная. Отсюда $T = T'$.

Обозначим через B матрицу преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$. B — диагональная матрица с элементами λ_1, λ_2, стоящими на главной диагонали. Так как $A = TBT^{-1}$, то $A^n = TB^nT^{-1}$, т.е.

$$A^n = \begin{pmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix}.$$

Перемножая эти матрицы, находим

$$a_{12} = y_1 y_2 \lambda_1^n + z_1 z_2 \lambda_2^n,$$

$$a_{22} = y_2^2 \lambda_1^n + z_2^2 \lambda_2^n.$$

Так как $|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}| < 1$, то $(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^n \to 0$. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{12}(n)}{a_{22}(n)} = \frac{y_1 y_2}{y_2^2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1.$$

Ответ. $\sqrt{2} + 1$.

Пример **2.17**. *Пусть $\mathcal{A} : V \to V$ — линейное преобразование конечномерного векторного пространства V. Тогда если векторное* *пространство V обладает базисом из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$, то пересечение ядра и образа состоит только из нулевого вектора.*

Решение. Пусть $a_1, \dots, a_n$ — базис пространства V из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. Тогда матрица A преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе является диагональной с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, стоящими на главной диагонали (в этом случае пишут $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$).

Пусть сначала все λ_i отличны от нуля. Берем любой вектор x. Пусть $[x] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ — его координатная строка в данном базисе. Тогда координатная строка его образа в рассматриваемом базисе равна $[\mathcal{A}(x)] = [x]A$. Легко проверяется, что

$$[\mathcal{A}(x)] = [x_1, x_2, \dots, x_n]A = [\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n].$$

Отсюда следует, что если $x \neq 0$, то $[\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots, \lambda_n x_n] \neq [0, 0, \dots, 0]$. Значит, в данном случае ядро преобразования $\mathcal{A}$ состоит только из нулевого вектора.

Теперь считаем, что некоторое λ_i равно 0. Меняя местами векторы $a_1, \dots, a_n$, можно получить базис, в котором на главной диагонали матрицы преобразования сначала стоят числа, отличные от нуля, а затем нули. Случай, когда A — нулевая матрица, очевиден, и мы его рассматривать не будем. Итак, считаем, что выбран базис $a_1, \dots, a_n$, в котором матрица преобразования A имеет вид:

$$A = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_k, 0 \dots, 0),$$

где $\lambda_1 \neq 0, \dots, \lambda_k \neq 0$.

Пусть вектор x принадлежит ядру линейного преобразования $\mathcal{A}$. Тогда $\mathcal{A}(x) = 0$. Пусть $[x] = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ — координатная строка вектора x. Получаем

$$[0, \dots, 0] = [\mathcal{A}(x)] = [x_1, x_2, \dots, x_n]A.$$

Но

$$[x_1, x_2, \dots, x_n]A = [\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_k x_k, 0, \dots, 0],$$

следовательно,

$$\lambda_1 x_1 = 0, \dots, \lambda_k x_k = 0.$$

Так как $\lambda_1 \neq 0, \ldots, \lambda_k \neq 0$, то видим, что $x_1 = 0, \ldots, x_k = 0$. Значит, координатные строки векторов из ядра преобразования $\mathcal{A}$ имеют вид:

$$[0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n].$$

Найдем теперь вид координатных строк векторов из образа V при $\mathcal{A}$. Всякий вектор из образа имеет вид $\mathcal{A}(x)$ для подходящего вектора x. Отсюда

$$[\mathcal{A}(x)] = [x_1, x_2, \ldots, x_n]A = [\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_k x_k, 0, \ldots, 0].$$

Следовательно, координатные строки векторов из образа следующие:

$$[x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0].$$

Сравнивая координатные строки из ядра и образа, замечаем, что общий вектор является нулевым.

Глава 3

Структура линейного преобразования

Теорема **3.1.** *Для каждого линейного преобразования ненулевого векторного пространства над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел существует по крайней мере одно инвариантное подпространство размерности 1 или 2.*

Одномерное инвариантное подпространство — это в точности пространство, натянутое на собственный вектор. Ясно, что всякое подпространство с базисом из собственных векторов всегда является инвариантным. Изложим метод, позволяющий строить базис подходящего двухмерного инвариантного подпространства пространства $\mathbb{R}^n$.

Пусть

$$e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, 0, 0, \dots, 1)$$

— стандартный базис пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование, A — матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе. Будем предполагать, что характеристический многочлен $\mid A - \lambda E \mid$ имеет корень $\lambda_0 = \rho + i\sigma$, не являющийся действительным числом, т.е. $\sigma \neq 0$. По этому числу $\lambda_0 = \rho + i\sigma$ будем строить базис двухмерного, инвариантного относительно $\mathcal{A}$ подпространства следующим образом.

1. Находим любое ненулевое решение системы уравнений

$$(x_1, \dots, x_n)(A - \lambda_0 E) = (0, \dots, 0),$$

пусть это вектор $y = (y_1, \dots, y_n)$.

2. Берем вектор $\overline{y} = (\overline{y}_1, \dots, \overline{y}_n)$, где число $\overline{y}_i$ является комплексно-сопряженным для числа y_i.

3. Вычисляем векторы:

$$a = \frac{1}{2}(y + \overline{y}), b = \frac{1}{2i}(y - \overline{y}).$$

Все компоненты этих векторов — действительные числа, а пространство, натянутое на эти вектора,— двухмерное инвариантное. Кроме того,

$$\begin{array}{c} \mathcal{A}(a) = \rho a - \sigma b \\ \mathcal{A}(b) = \sigma a + \rho b \end{array}.$$

Таким образом, найден базис двухмерного инвариантного подпространства.

Следующий пример показывает, что не всегда существует базис двухмерного инвариантного подпространства из собственных векторов либо находится указанным методом.

Пример **3.2.** *Пусть линейное преобразование $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в базисе $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда пространство $\mathbb{R}^2$ инвариантно относительно линейного преобразования $\mathcal{A}$, все корни характеристического многочлена преобразования $\mathcal{A}$ являются действительными числами, $\mathbb{R}^2$ не имеет базиса из собственных векторов этого преобразования.*

Ответ. Несложно проверяется, что $| \; A - \lambda E \; |= \lambda^2$, поэтому все корни характеристического многочлена действительны (они равны 0). Собственные векторы линейного преобразования $\mathcal{A}$ — это ненулевые решения системы уравнений $(x_1, x_2)(A - 0 \cdot E) = (0, 0)$, которую можно записать так:

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0).$$

Ранг матрицы этой системы уравнений равен 1, следовательно, пространство решений рассматриваемой системы уравнений имеет размерность 1. Таким образом, в $\mathbb{R}^2$ не существует базиса из собственных векторов данного преобразования.

Пример **3.3.** *Линейное преобразование $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$. Найти хотя бы одно двухмерное инвариантное подпространство.*

Решение. Требуется указать какой-нибудь базис двухмерного инвариантного подпространства. Будем следовать изложенной схеме.

Сначала вычисляем характеристический многочлен $\mid A-\lambda E\mid$. Легко проверяется, что

$$\mid A-\lambda E\mid = -(\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+13).$$

Находим корни этого многочлена. Они равны $1,\ 2+3i,\ 2-3i$. Берем любой недействительный корень, например, $\lambda_0=2+3i$. По этому корню будем строить базис двухмерного инвариантного подпространства.

1. Найдем базис пространства решений системы уравнений

$$(x_1,x_2,x_3)(A-(2+3i)E)=(0,0,0).$$

$$(x_1,x_2,x_3)(A-(2+3i)E)=(0,0,0)\Leftrightarrow(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}2-3i & 2 & -5\\ 6 & 2-3i & -9\\ 5 & 3 & -9-3i\end{pmatrix}=$$

$$=(0,0,0)\Leftrightarrow\begin{cases}(2-3i)x_1+6x_2+5x_3=0\\ 2x_1+(2-3i)x_2+3x_3=0\\ -5x_1-9x_2+(-9-3i)x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(2-3i)x_1+6x_2+5x_3=0\\ 2x_1+(2-3i)x_2+3x_3\quad=0\end{cases}.$$

При помощи несложных вычислений получаем, что $y=(-48+15i,4+9i,17-12i)$ — базис пространства решений этой системы уравнений.

2. В нашем случае $\overline{y}=(-48-15i,4-9i,17+12i)$.

3. Вычисляем базис искомого двухмерного инвариантного подпространства:

$$a=\frac{1}{2}(x+\overline{x})=(-48,4,17),$$

$$b=\frac{1}{2i}(x-\overline{x})=(-15,-9,12).$$

Ответ. В качестве базиса искомого инвариантного подпространства можно взять векторы $(-48,4,17),(-15,-9,12)$.

Пример **3.4.** *Линейное преобразование* $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *в базисе* $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ *имеет матрицу* A. *Из общей теории известно, что* $\mathbb{R}^3$ *разлагается в прямую сумму инвариантных относительно* $\mathcal{A}$ *подпространств* L_1 *и* L_2, *где* $dimL_1 = 2$, $dimL_2 = 1$. *Найти базисы* L_1 *и* L_2 *и матрицу преобразования* $\mathcal{A}$ *в этом объединенном базисе, где* $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Решение основано на доказательстве соответствующей теоремы для линейного преобразования. Найдем сначала характеристический многочлен:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -6 & 4 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 2).$$

Корни характеристического многочлена: $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$, $\lambda_3 = 2$.

Строим базис двухмерного инвариантного подпространства по методу, изложенному в начале этой главы.

1). Найдем базис пространства решений системы уравнений (можно находить любое ненулевое решение):

$$(x_1, x_2, x_3)(A - (1+i)E) = (0,0,0).$$

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3-i & -6 & 4 \\ 1 & -1-i & 0 \\ 0 & 1 & -1-i \end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (3-i)x_1 & +x_2 & & = 0 \\ 4x_1 & & -(1+i)x_3 & = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow x = (1, -3+i, 2-2i)$ — базис пространства решений системы уравнений. Тогда $\overline{x} = (1, -3-i, 2+2i)$. Базис двухмерного инвариантного подпространства получается так:

$$a = \frac{1}{2}(x + \overline{x}) = (1, -3, 2),$$

$$b = \frac{1}{2i}(x - \overline{x}) = (0, 1, -2).$$

2). Найдем собственный вектор c, относящийся к собственному значению $\lambda_3 = 2$.

$$(x_1, x_2, x_3)(A - 2E) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} 2x_1 & +x_2 & & = 0 \\ 4x_1 & & -2x_3 & = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow c = (1, -2, 2)$ — базис одномерного инвариантного пространства L_2.

3). Объединенный базис: a, b, c. Матрица перехода T^{-1} от базиса a, b, c к базису e_1, e_2, e_3 есть

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица равна $T^{-1}AT$. Вычисляя это произведение матриц, получаем ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример **3.5**. *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ в базисе $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ имеет матрицу A. Проверить, что преобразование $\mathcal{A}$ ортогональное, и найти его канонический вид, где* $A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся хорошо известным фактом: линейное преобразование является ортогональным тогда и только тогда, когда матрица этого преобразования в некотором (и, следовательно, в любом) ортонормированном базисе ортогональная. Теперь ортогональность преобразования $\mathcal{A}$ следует из того, что строки нашей матрицы образуют ортонормированную систему векторов.

Вычислим корни характеристического многочлена:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \lambda_3 = 1.$$

Решаем эту задачу в соответствии с доказательством теоремы о каноническом виде ортогонального преобразования.

1). Найдем базис пространства решений системы уравнений:

$$(x_1, x_2, x_3)(A - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})E) = (0,0,0).$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2})x_1 & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & = 0 \\ -\frac{1}{3}x_1 & +(\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2})x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x = (-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ — базис пространства решений рассматриваемой системы уравнений. Пусть

$$\overline{x} = (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Введем векторы

$$a = \frac{1}{2}(x + \overline{x}) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}),$$

$$b = \frac{1}{2i}(x - \overline{x}) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Нормируем эти векторы. Получим:

$$e_1' = \frac{1}{|a|}a = (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}),$$

$$e_2' = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}).$$

Это часть искомого базиса.

2). Найдем собственный вектор, относящийся к собственному значению $\lambda_3 = 1$.

$$(x_1, x_2, x_3)(A - E) = (0,0,0).$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{3}x_1 & +\frac{2}{3}x_2 & -\frac{1}{3}x_3 & = 0 \\ -\frac{1}{3}x_1 & -\frac{1}{3}x_2 & +\frac{2}{3}x_3 & = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c = (1, 1, 1)$ — базис пространства решений этой системы. Нормируем вектор c, получим:

$$e_3' = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Итак, e_1', e_2', e_3' — искомый базис.

3). Найдем матрицу преобразования в базисе e_1', e_2', e_3'. Имеем:

$$e_1' = -\frac{\sqrt{6}}{6}e_1 + \frac{\sqrt{6}}{6}e_2 - \frac{\sqrt{6}}{6}e_3,$$

$$e_2' = -\frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_3,$$

$$e_3' = \frac{\sqrt{3}}{3}e_1 + \frac{\sqrt{3}}{3}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{3}e_3.$$

Следовательно,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow T = (T^{-1})' = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$$

(так как для ортогональной матрицы T имеет место равенство $T^{-1} = T'$). Отсюда, поскольку искомая матрица равна $T^{-1}AT$, получаем следующий ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Как уже отмечено, из доказательства упомянутой выше теоремы вытекает, что векторам e_1', e_2' в каноническом виде матрицы соответствует клетка

$$\begin{pmatrix} \rho & -\sigma \\ \sigma & \rho \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 = \rho + i\sigma$. Этим также можно было воспользоваться.

Пример **3.6.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^3$ в базисе $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$ имеет матрицу A. Проверить, что преобразование $\mathcal{A}$ ортогональное, и найти его канонический вид, где* $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Снова воспользуемся хорошо известным фактом: линейное преобразование является ортогональным тогда и только тогда, когда матрица этого преобразования в некотором ортонормированном базисе ортогональная. Теперь ортогональность преобразования $\mathcal{A}$ следует из того, что строки нашей матрицы образуют ортонормированную систему векторов.

Вычислим корни характеристического многочлена:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i, \lambda_3 = 1.$$

Решаем эту задачу в соответствии с доказательством теоремы о каноническом виде ортогонального преобразования.

1). Найдем базис пространства решений системы уравнений:

$$(x_1, x_2, x_3)(A + i)E) = (0,0,0).$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + i & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} + i & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & i \end{pmatrix} = (0,0,0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (\frac{1}{2} + i)x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & +\frac{\sqrt{2}}{2}x_3 & = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 & +(\frac{1}{2} + i)x_2 & -\frac{\sqrt{2}}{2}x_3 & = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$x = (1, -1, -\sqrt{2}i)$ — базис пространства решений рассматриваемой системы уравнений. Пусть

$$\overline{x} = (1, -1, \sqrt{2}i).$$

Введем векторы

$$a = \frac{1}{2}(x + \overline{x}) = (1, -1, 0),$$

$$b = \frac{1}{2i}(x - \overline{x}) = (0, 0, -\sqrt{2}).$$

Нормируем эти векторы. Получим

$$e_1' = \frac{1}{|a|}a = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0),$$

$$e_2' = (0, 0, 1).$$

Это часть искомого базиса.

2). Найдем собственный вектор, относящийся к собственному значению $\lambda_3 = 1$.

$$(x_1, x_2, x_3)(A - E) = (0, 0, 0).$$

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & +\frac{\sqrt{2}}{2}x_3 & = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x_1 & +\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 & -x_3 & = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c = (1, 1, 0)$ — базис пространства решений этой системы. Нормируем вектор c, получим:

$$e_3' = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0).$$

Итак, e_1', e_2', e_3' — искомый базис.

3). Найдем матрицу преобразования в базисе e_1', e_2', e_3'. Имеем:

$$e_1' = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + 0 \cdot e_3,$$

$$e_2' = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + e_3,$$

$$e_3' = \frac{\sqrt{2}}{2}e_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}e_2 + 0 \cdot e_3.$$

Следовательно,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow T = (T^{-1})' = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(поскольку для ортогональной матрицы T имеет место равенство $T^{-1} = T'$). Отсюда, так как искомая матрица равна $T^{-1}AT$, получаем следующий ответ.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Глава 4

Жорданова форма матрицы

4.1. Общие сведения

Пусть $V = C^n$ — пространство строк с комплексными компонентами, $\mathcal{A} : V \to V$ — линейное преобразование векторного пространства V, A — матрица линейного преобразования $\mathcal{A}$ в старом базисе

$$e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1).$$

Существует базис, в котором матрица данного преобразования $\mathcal{A}$ имеет так называемую жорданову форму. Изложим метод построения такого базиса.

1. Находим сначала все корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ характеристического многочлена $f(\lambda) = |A - \lambda E|$. Затем разлагаем характеристический многочлен $f(\lambda)$ на множители. Получим:

$$f(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{k_1} (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{k_r},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ — попарно различные корни многочлена $f(\lambda)$.

2. $R_i = \ker(\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E})^{k_i}$ называется корневым подпространством векторного пространства V, соответствующим собственному значению λ_i ($\mathcal{E}$ — тождественное преобразование). Известно, что V разлагается в прямую сумму корневых подпространств, т.е.

$$V = R_1 \oplus R_2 \oplus \cdots \oplus R_r.$$

Укажем, как построить базис каждого подпространства R_i. Искомый базис будет объединением построенных базисов пространств $R_1, \ldots, R_r$, расположенных один за другим.

3. Рассматриваем корневое подпространство R_i. Высотой вектора $v \in R_i$ назовем наименьшее k, такое, что $(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^k(v) = 0$. Пусть $H_k = \{v|(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^k(v) = 0\}$ — подпространство векторов, высоты которых не превосходят k. Для некоторого t имеем:

$$0 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{t-1} \subset H_t = R_i.$$

Строим базисы подпространств H_k, $k = 1, 2, \ldots$. Для этого заметим, что базис пространства H_k совпадает с базисом пространства решений следующей системы уравнений:

$$(x_1, \ldots, x_n)(A - \lambda_i E)^k = 0.$$

Это будут вспомогательные базисы.

Процесс построения базисов закончится тогда, когда будет построен базис некоторого пространства H_t, состоящий из k_i векторов. Последнее означает, что $dim H_t = dim R_i$, следовательно, $H_t = R_i$.

4. Вспомогательный базис пространства H_{t-1} дополняем до базиса пространства $H_t = R_i$. Делаем это так.

Составляем матрицу, первые строки которой — все элементы вспомогательного базиса пространства H_{t-1}; за ними следуют строки, которые представляют собой все элементы вспомогательного базиса пространства H_t. Ищем ненулевой минор максимального порядка (методом окаймления миноров, например), содержащий все строки, в которых стоят элементы базиса пространства H_{t-1}.

Пусть $f_1, \ldots, f_{p_1}$ — элементы вспомогательного базиса пространства H_t, части которого входят в этот ненулевой минор. Ясно, что $f_1, \ldots, f_{p_1}$ имеют высоту t. $f_1, \ldots, f_{p_1}$ — это часть того базиса, который пытаемся построить, состоящая из векторов высоты t.

5. Находим векторы:

$$f_j, (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})(f_j), (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^2(f_j), \ldots, (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})^{t-1}(f_j).$$

При каждом j это множество векторов образует базис пространства, которое называется циклическим. Все эти векторы входят в искомый базис.

6. Пусть V_{t-1} — пространство, натянутое на уже построенные векторы

$$(\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})(f_1), \ldots, (\mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E})(f_{p_1})$$

высоты $t-1$ и на вспомогательный базис пространства H_{t-2}. Строим базис пространства V_{t-1}. Это делается так.

Составляем из векторов

$$(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})(f_1), \ldots, (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})(f_{p_1})$$

и из вспомогательного базиса пространства H_{t-2} матрицу. Нужный базис пространства V_{t-1} будут составлять строки, на которых стоит ненулевой минор максимального порядка.

7. Дополняем найденный базис пространства V_{t-1} до базиса пространства H_{t-1}, как это делалось в пункте 4. Пусть

$$f_{p_1+1}, \ldots, f_{p_2}$$

— векторы, дополняющие базис пространства V_{t-1} до базиса пространства H_{t-1}. Эти векторы имеют высоту $t-1$ и составляют часть искомого базиса.

Покажем, как построить часть искомого базиса, состоящего из векторов высоты $t-2$.

8. Находим векторы (при $j > p_1$):

$$f_j, (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})(f_j), (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^2(f_j), \ldots, (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{t-2}(f_j).$$

При каждом j это множество векторов образует базис пространства, которое называется циклическим.

9. Пусть V_{t-2} — пространство, натянутое на векторы

$$(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^2(f_1), \ldots, (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^2(f_{p_1}), (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})(f_{p_1+1}), \ldots, (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})(f_{p_2})$$

и вспомогательный базис пространства H_{t-3}. Дополняем затем базис пространства V_{t-2} до базиса пространства H_{t-2} векторами $f_{p_2+1}, \ldots, f_{p_3}$. $f_{p_2+1}, \ldots, f_{p_3}$ — часть искомого базиса из векторов высоты $t-2$.

10. Предположим, что мы построили векторы

$$f_1, \ldots, f_{p_1}, f_{p_1+1}, \ldots, f_{p_2}, \ldots, f_{p_k+1}, \ldots, f_{p_{k+1}},$$

где $f_{p_k+1}, \ldots, f_{p_{k+1}}$ — векторы высоты $t-k$. Тогда V_{t-k-1} — пространство, натянутое на векторы из уже построенных базисов циклических пространств высоты $t-k-1$ и вспомогательный базис пространства H_{t-k-2}. $f_{p_{k+1}+1}, \ldots, f_{p_{k+2}}$ — векторы, дополняющие базис V_{t-k-1} до базиса H_{t-k-1}.

11. В результате этого процесса получим базисы циклических пространств, объединение которых (располагаем один базис за другим) есть искомый базис пространства R_i.

Переходим к конкретным примерам. Начнем с самых простых.

4.2. Матрицы второго порядка

Случай 1. *Преобразование $\mathcal{A}$ имеет два различных собственных значения λ_1 и λ_2. В этом случае жорданова форма имеет диагональный вид с λ_1,λ_2, стоящими на диагонали; искомый базис состоит из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$.*

Пример **4.1.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму. Здесь* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

А. Легко проверить, что $|A - \lambda E| = (2 - \lambda)(1 - \lambda)$. Построим сначала базис корневого подпространства R_1, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 1$. Заметим, что $dim R_1 = 1$.

Б. Строим базис H_1. Он совпадает с базисом пространства решений системы уравнений $(x_1, x_2) \cdot (A - 1E) = 0$. Решая эту систему уравнений, находим, что $v_1 = (0, 1)$ — базис пространства решений этой системы и, следовательно, $v_1 = (0, 1)$ — базис H_1. По пункту 3 $H_1 = R_1$. В этом случае процесс построения искомого базиса закончен.

В. Построим теперь базис корневого подпространства R_2, соответствующего собственному значению $\lambda_2 = 2$. Заметим, что $dim R_2 = 1$.

$$(x_1, x_2) \in H_1 \quad \Longleftrightarrow \quad (x_1, x_2) \cdot (A - 2E) = 0.$$

Решая эту систему уравнений, получаем, что $v_2 = (1, 1)$ — базис H_1. Снова по пункту 3 $H_1 = R_2$. Процесс построения нужного базиса закончен.

Итак, v_1, v_2, где $v_1 = (0, 1), v_2 = (1, 1)$ — искомый базис, и матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе равна $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Случай 2. *Преобразование $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение λ. В этом случае жорданова форма матрицы имеет один из видов:*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Пример **4.2.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму,* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

А. Легко проверить, что
$|A - \lambda E| = (2-\lambda)^2 \quad \Longrightarrow \quad dim R_1 = 2.$

Б. Строим вспомогательный базис H_1. Он совпадает с базисом пространства решений системы уравнений $(x_1, x_2) \cdot (A - 2E) = 0$. Решая эту систему уравнений, находим, что $v_1 = (0, 1)$ — базис пространства решений этой системы и, следовательно, $v_1 = (0, 1)$ — вспомогательный базис H_1.

В. Строим вспомогательный базис H_2, т.е. находим базис пространства решений системы уравнений $(x_1, x_2) \cdot (A - 2E)^2 = 0$. Поскольку $(A - 2E)^2$ — нулевая матрица, то любой базис векторного пространства C^2 будет требуемым вспомогательным базисом. Итак, пусть e_1, e_2, где $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$, — вспомогательный базис H_2. Так как $dim H_2 = 2$, то $H_2 = R_1$, и на этом процесс построения вспомогательного базиса заканчивается.

Г. Вспомогательный базис пространства H_1 дополняем до базиса пространства H_2. Для этого составляем матрицу, строками которой служат координаты векторов v_1, e_1, e_2: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

При помощи метода окаймления миноров найдем максимальный ненулевой минор, содержащий первую строку (т.е. вектор v_1). Он состоит из первой и третьей строк этой матрицы. Итак, $f_1 = e_2$ — искомый вектор высоты 2. Строим циклическую серию $f_1, (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(f_1)$. Эти два вектора входят в искомый базис, а так как размерность всего пространства равна двум, то на этом процесс построения требуемого базиса закончен.

Обозначим $e_1^{(2)} = f_1, e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(f_1)$. Ясно, что $e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(f_1) = (0, 1) \cdot (A - 2E) = (4, 0)$.

Итак, нужный базис состоит из векторов $e_1^{(2)} = (0, 1), e_1^{(1)} = (4, 0)$. (Важен порядок расположения векторов в базисе.)

Найдем матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Из равенства $e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(2)})$ следует, что $\mathcal{A}(e_1^{(2)}) = 2e_1^{(2)} + e_1^{(1)}$.

Из равенства $(\mathcal{A}-2\mathcal{E})(e_1^{(1)})=0$ вытекает, что $\mathcal{A}(e_1^{(1)})=2e_1^{(1)}$.

Итак, $(4,0),(0,1)$ — искомый базис, и в этом базисе матрица данного преобразования имеет жордановый вид, равный $\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$.

4.3. Матрицы третьего порядка

Если преобразование $\mathcal{A}$ имеет три различных собственных значения λ_1, λ_2, λ_3, то искомый базис состоит из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$. В этом случае жорданова форма матрицы имеет диагональный вид с λ_1,λ_2, λ_3 на диагонали.

Если преобразование $\mathcal{A}$ имеет два различных собственных значения, то в этом случае жорданова форма матрицы A будет иметь один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$

Пример **4.3.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму.* $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&2&-1\\2&-1&4\end{pmatrix}$.

Решение.

А. Находим собственные значения: $|A-\lambda E|=(2-\lambda)^2(3-\lambda)$. Построим сначала базис корневого подпространства R_1, соответствующего собственному значению $\lambda_1=2$. Заметим, что $dim R_1=2$.

Б. Строим вспомогательный базис H_1, который совпадает с базисом пространства решений системы уравнений

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(A-2E)=0.$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $v_1=(1,1,1)$ — вспомогательный базис пространства H_1.

Строим вспомогательный базис H_2, который совпадает с базисом пространства решений системы уравнений $(x_1,x_2,x_3)\cdot(A-2E)^2=0$. Решая эту систему уравнений, получаем, что u_1,u_2, где $u_1=$

$(3,2,0), u_2 = (3,0,2)$ — вспомогательный базис пространства H_2. $dimH_2 = 2$ и $dimR_1 = 2$, следовательно, процесс построения вспомогательных базисов заканчивается.

В. Вспомогательный базис пространства H_1 дополняем до базиса пространства H_2. Для этого составляем матрицу, строками которой являются координаты векторов v_1, u_1, u_2: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

При помощи метода окаймления миноров найдем максимальный ненулевой минор, содержащий элементы первой строки (т.е. вектора v_1). Можно взять минор второго порядка, стоящий в левом верхнем углу. Итак, $f_1 = u_1$ — искомый вектор высоты 2. Строим циклическую серию $f_1, (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(f_1)$. Эти два вектора входят в искомый базис, а так как $dimR_1 = 2$, то на этом процесс построения базиса корневого пространства $dimR_1$ закончен.

Обозначим $e_1^{(2)} = f_1, e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(f_1)$; $\quad e_1^{(1)} = f_1 \cdot (A - 2E) = (-5, 3, -5)$.

Итак, требуемый базис корневого подпространства R_1 состоит из векторов $e_1^{(1)} = (-5,3,-5), e_1^{(2)} = (3,2,0)$.

Построим базис корневого подпространства R_2, соответствующего собственному значению $\lambda_3 = 3$, $dimR_2 = 1$.

Г. Строим базис пространства H_1. Он совпадает с базисом пространства решений системы уравнений $(x_1, x_2, x_3) \cdot (A - 3E) = 0$. Решая эту систему уравнений, получаем, что $v_1 = (1,0,1)$ — базис пространства ее решений и, следовательно, базис H_1. По пункту 3 $H_1 = R_2$. В этом случае процесс построения искомого базиса R_2 закончен.

По пункту 2 базис всего пространства будет объединением базисов пространств R_1 и R_2. Итак, $e_1^{(2)} = (3,2,0), e_1^{(1)} = (-5,3,-5), v_1 = (1,0,1)$ — искомый базис.

Найдем матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Так как $e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(2)})$, то $\mathcal{A}(e_1^{(2)}) = 2e_1^{(2)} + e_1^{(1)}$.

Так как $(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(1)}) = 0$, то $\mathcal{A}(e_1^{(1)}) = 2e_1^{(1)}$.

$(\mathcal{A} - 3\mathcal{E})(v_1) = 0$, следовательно $\mathcal{A}(v_1) = 3v_1$. Отсюда следует, что матрица данного преобразования в базисе $e_1^{(2)}, e_1^{(1)}, v_1$ будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Пример **4.4**. *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму.* $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

А. Находим собственные значения: $|A-\lambda E| = (1+\lambda)^2(3-\lambda)$. Построим сначала базис корневого подпространства R_1, соответствующего собственному значению $\lambda = -1$, $dimR_1 = 2$.

Б. Строим вспомогательный базис H_1, т.е. находим базис пространства решений системы уравнений $(x_1, x_2, x_3) \cdot (A + 1E) = 0$. Это будут вектора $v_1 = (3, 0, 1)$ и $v_2 = (1, 1, 0)$. Получили, что $dimH_1 = dimR_1$, следовательно, по пункту 3 процесс построения вспомогательных базисов заканчивается. Базис корневого пространства R_1 будет состоять из векторов v_1 и v_2.

Построим теперь базис корневого подпространства R_2, соответствующего собственному значению $\lambda = 3$, $dimR_2 = 1$.

В. Строим базис пространства H_1. Как и раньше, он совпадает с базисом пространства решений системы уравнений

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (A - 3E) = 0.$$

Следовательно, $u = (1, -1, 2)$ — базис пространства H_1. А так как $dimH_1 = dimR_2$, то по пункту 3 вектор u будет составлять базис R_2.

По пункту 2 искомый базис всего пространства состоит из векторов v_1, v_2, u. Так как все эти три вектора собственные, то ясно, что матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если преобразование $\mathcal{A}$ имеет одно собственное значение, то в этом случае жорданова форма матрицы A будет иметь один из следующих видов:

$$\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Пример **4.5.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, где* $A = \begin{pmatrix}4 & -1 & 0\\ 3 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение.

А. Находим собственные значения: $|A - \lambda E| = (2-\lambda)^3$.

Б. Строим вспомогательный базис H_1. Так как он совпадает с базисом пространства решений системы уравнений

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (A - 2E) = 0,$$

то несложные вычисления показывают, что $v_1 = (1, -1, 1)$ — вспомогательный базис пространства H_1:

Строим вспомогательный базис H_2.

$$(x_1, x_2, x_3) \in H_2 \quad \Longleftrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3)(A - 2E)^2 = 0.$$

Следовательно, $u_1 = (1, 0, -1), u_2 = (1, 1, 0)$ — вспомогательный базис пространства H_2.

Строим вспомогательный базис H_3. Так как он совпадает с базисом пространства решений системы уравнений

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (A - 2E)^3 = 0$$

и $(A - 2E)^3$ — нулевая матрица, то векторы

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$$

образуют вспомогательный базис пространства H_3.

В. Вспомогательный базис пространства H_2 дополняем до базиса пространства H_3 (см. пункт 4). Составляем матрицу из координат векторов u_1, u_2, e_1, e_2, e_3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ищем максимальный ненулевой минор, содержащий первые две строки. Можно взять, например, минор, содержащий первые три строки. Тогда в соответствии с пунктом 4 $f_1 = e_1$ — искомый вектор высоты 3.

Строим циклическую серию:

$$e_1^{(3)} = f_1, \quad e_1^{(2)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^3), \quad e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(2)}).$$

Эти три вектора входят в искомый базис, а так как размерность всего пространства тоже равна трем, то мы нашли этот базис:

$$e_1^{(2)} = e_1^{(3)} \cdot (A - 2E) = (2, -1, 0), \quad e_1^{(1)} = e_1^{(2)} \cdot (A - 2E) = (1, -1, 1),$$

$e_1^{(3)} = f_1 = (1, 0, 0)$. Найдем матрицу преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Из равенства $(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(3)}) = e_1^{(2)}$ следует, что $\mathcal{A}(e_1^{(3)}) = 2e_1^{(3)} + e_1^{(2)}$.
Из равенства $(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(2)}) = e_1^{(1)}$ следует, что $\mathcal{A}(e_1^{(2)}) = 2e_1^{(2)} + e_1^{(1)}$.
Из равенства $(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(1)}) = 0$ следует, что $\mathcal{A}(e_1^{(1)}) = 2e_1^{(1)}$.
Теперь легко выписать жорданову форму матрицы преобразования $\mathcal{A}$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Пример **4.6.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму.* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Решение.

А. Находим собственные значения: $|A - \lambda E| = (-1 - \lambda)^3$.
Б. Строим вспомогательный базис H_1, который
совпадает с базисом пространства решений системы уравнений

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (A + 1E) = 0.$$

Имеем: $v_1 = (2, 0, -1)$, $v_2 = (1, -1, 0)$ — вспомогательный базис пространства H_1.

Строим вспомогательный базис H_2, который совпадает с базисом пространства решений системы уравнений

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (A + 1E)^2 = 0.$$

Получаем, что $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ — вспомогательный базис пространства H_2.

В. Вспомогательный базис пространства H_1 дополняем до базиса пространства H_2 (см. пункт 4). Составляем матрицу из координат векторов v_1, v_2, e_1, e_2, e_3:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выбираем максимальный ненулевой минор, содержащий первые две строки. Можно взять, например, минор, содержащий первые три строки. Тогда в соответствии с пунктом 4 $f_1 = e_1$ — искомый вектор высоты 2. Строим циклическую серию:

$$e_1^{(2)} = f_1, \quad e_1^{(1)} = (\mathcal{A} + 1\mathcal{E})(e_1^{(2)}), \quad e_1^{(1)} = e_1^{(2)}(A + 1E) = (1, 1, -1).$$

Векторы $e_1^{(2)}, e_1^{(1)}$ составляют часть искомого базиса. Далее переходим к пункту 6.

Г. Строим базис пространства V_1, т.е. базис пространства, натянутого на вектора высоты 1 из построенной циклической серии (это вектор $e_1^{(1)}$), и базис пространства $H_0 = 0$. Очевидно, что $e_1^{(1)}$ — базис V_1.

Д. Дополняем базис пространства V_1 до базиса пространства H_1. (Это можно сделать, как и раньше). Получаем, что дополнительным вектором служит v_1. Он имеет высоту 1 и будет входить в искомый базис. Обозначим $e_2^{(1)} = v_1$. Итак, векторы $e_1^{(2)}, e_1^{(1)}, e_2^{(1)}$ составляют искомый базис. Матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4.4. Матрицы произвольного порядка

Пример **4.7.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, где* $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

А. Находим собственные значения: $|A - \lambda E| = (2-\lambda)^4$.

Б. Строим вспомогательный базис H_1:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (A - 2E) = 0 \Longrightarrow v_1 = (1, 1, 1, 1)$$

— вспомогательный базис H_1.

Строим вспомогательный базис H_2:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (A - 2E)^2 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$u_1 = (1, 1, 1, 0), u_2 = (0, 0, 0, 1)$ — вспомогательный базис пространства H_2.

Строим вспомогательный базис H_3:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (A - 2E)^3 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$w_1 = (1, 0, 0, -1), w_2 = (1, 0, -1, 0), w_3 = (1, -1, 0, 0)$ — вспомогательный базис пространства H_3.

Строим вспомогательный базис H_4:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (A - 2E)^4 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

— вспомогательный базис пространства H_4.

В. Вспомогательный базис пространства H_3 дополняем до базиса пространства H_4 (как в пункте 4). Дополнительным вектором служит e_1, тогда $f_1 = e_1$ — искомый вектор высоты 4. Строим циклическую серию:

$$e_1^{(4)} = f_1, \quad e_1^{(3)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(4)}), \quad e_1^{(2)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(3)}),$$

$$e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 2\mathcal{E})(e_1^{(2)}).$$

Векторы $e_1^{(4)}, e_1^{(3)}, e_1^{(2)}, e_1^{(1)}$ легко вычисляются, и все они входят в искомый базис, и так как размерность всего пространства равна четырем, то мы нашли базис, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ будет иметь жорданову форму. Матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид:
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Пример **4.8.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, где* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Решение.

А. Находим собственные значения: $|A - \lambda E| = (0 - \lambda)^4$.

Б. Строим вспомогательный базис H_1:
$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (A - 0 \cdot E) = 0 \quad \Longrightarrow v_1 = (0, 0, 1, -2), v_2 = (-3, 1, 0, 5)$ — вспомогательный базис H_1.

Строим вспомогательный базис H_2:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (A - 0 \cdot E)^2 = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$e_1 = (1, 0, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0, 0), e_3 = (0, 0, 1, 0), e_4 = (0, 0, 0, 1)$$

— вспомогательный базис пространства H_2. Так как $dim H_2 = 4$ и все пространство имеет размерность 4, то больше вспомогательные базисы искать не нужно.

В. Вспомогательный базис пространства H_1 дополняем до базиса пространства H_2 (как в пункте 4). Дополнительными векторами служат e_1 и e_2, тогда $f_1 = e_1, f_2 = e_2$. Эти векторы имеют высоту 2. Строим по ним циклические серии:

$$e_1^{(2)} = f_1, \quad e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 0\mathcal{E})(f_1), \quad e_2^{(2)} = f_2, \quad e_2^{(1)} = (\mathcal{A} - 0\mathcal{E})(e_2).$$

Векторы $e_1^{(2)}, e_1^{(1)}, e_2^{(2)}, e_2^{(1)}$ будут входить в искомый базис. Так как их четыре и размерность всего пространства равна четырем, то эти векторы и будут составлять базис, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет жорданову форму. Матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид:
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Пример **4.9.** *Линейное преобразование $\mathcal{A}$ в стандартном базисе задано матрицей A. Найти базис, в котором матрица этого преобразования имеет жорданову форму, где* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение.

А. Находим собственные значения: $|A - \lambda E| = (1-\lambda)^5$.

Б. Строим вспомогательный базис H_1: $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (A - 1 \cdot E) = 0 \implies v_1 = (0,1,0,1,0), v_2 = (0,1,1,0,0)$ — вспомогательный базис H_1.

Строим вспомогательный базис H_2:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (A - 1 \cdot E)^2 = 0 \quad \implies$$

$u_1 = (0,0,0,0,1), u_2 = (0,1,0,1,0), u_3 = (0,1,1,0,0)$,
$u_4 = (1,0,0,0,0)$ — вспомогательный базис пространства H_2.

Строим вспомогательный базис H_3.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \cdot (A - 1 \cdot E)^3 = 0 \quad \implies$$

$e_1 = (1,0,0,0,0), e_2 = (0,1,0,0,0), e_3 = (0,0,1,0,0)$,
$e_4 = (0,0,0,1,0), e_5 = (0,0,0,0,1)$ — вспомогательный базис пространства H_3.

В. Вспомогательный базис пространства H_2 дополняем до базиса пространства H_3 (как в пункте 4). Дополнительным вектором служит e_2, тогда $f_1 = e_2$ — искомый вектор высоты 3. Строим циклическую серию:

$$e_1^{(3)} = f_1, \quad e_1^{(2)} = (\mathcal{A} - 1\mathcal{E})(e_1^{(3)}), \quad e_1^{(1)} = (\mathcal{A} - 1\mathcal{E})(e_1^{(2)}).$$

Векторы $e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, e_1^{(3)}$ легко вычисляются, и все они входят в искомый базис.

Г. Строим базис пространства V_2, т.е. базис пространства, натянутого на векторы высоты 2, из построенных циклических серий и базис пространства H_1. Векторы $e_1^{(2)}, v_1, v_2$ образуют искомый базис.

Д. Дополняем найденный базис пространства V_2 до базиса пространства H_2 (как в пункте 4). Дополнительным вектором будет $u_4 = (1,0,0,0,0)$. Обозначим $f_2 = u_1$. Это будет вектор высоты 2. Строим для него циклическую серию:

$$e_2^{(2)} = f_2, \quad e_2^{(1)} = (\mathcal{A} - 1\mathcal{E})(f_2).$$

Эти векторы будут входить в искомый базис. Так как ранее уже были построены три вектора из базиса корневого подпространства, то все вместе эти векторы будут составлять искомый базис корневого подпространства.

Е. Итак, базис, в котором матрица преобразования $\mathcal{A}$ имеет жорданову форму, состоит из векторов:

$$e_1^{(3)} = (0,1,0,0,0), e_1^{(2)} = (0,-2,1,-3,1), e_1^{(1)} = (0,0,-1,1,0),$$
$$e_2^{(2)} = (1,0,0,0,0), e_2^{(1)} = (0,-1,1,-2,0).$$

Матрица преобразования $\mathcal{A}$ в этом базисе будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

в чем легко убедиться непосредственной проверкой.

Покажем, как, используя жорданову форму, можно решать более трудные задачи.

Пример **4.10**. *Найти все матрицы второго порядка над полем комплексных чисел, квадрат которых равен нулевой матрице.*

Решение. Пусть A — матрица второго порядка и $A^2 = 0$. Матрица A является матрицей линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$, введенного в главе 1. Выберем базис, в котором матрица преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$ имеет жорданову форму, и обозначим ее через B. Тогда для некоторой невырожденной матрицы T справедливо равенство $B = T^{-1}AT$, откуда $A = TBT^{-1}$. Так как $0 = A^2 = (TBT^{-1})^2 = TB^2T^{-1}$, то $B^2 = 0$. Матрица B имеет вид: $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & c \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Значит, $B^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & * \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix}$. Но B^2 — нулевая матрица, следовательно, $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$. Итак, мы показали, что B имеет следующий вид: $B = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что квадраты всех таких матриц B равны нулевой матрице. Отсюда множество всех искомых матриц совпадает со множеством матриц TBT^{-1}, где T — произвольная невырожденная матрица.

Пример **4.11.** *Пусть A — квадратная матрица порядка n, E — единичная матрица порядка n и $(E+A)^m = 0$. Доказать, что тогда A — невырожденная матрица.*

Решение. Пусть B — жорданова форма матрицы A, T — невырожденная матрица, для которой $B = T^{-1}AT$. Тогда

$$0 = T^{-1}(E+A)^m T = (T^{-1}(E+A)T)^m = (T^{-1}ET + T^{-1}AT)^m = (E+B)^m.$$

Пусть

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow (E+B)^m = \begin{pmatrix} (1+\lambda_1)^m & * & \dots & * \\ 0 & (1+\lambda_2)^m & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \dots & \dots & (1+\lambda_n)^m \end{pmatrix}.$$

Так как $(E+B)^m = 0$, то получаем, что

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = -1.$$

Значит, $| A |=| B |= (-1)^n$, и поэтому A — невырожденная матрица.

Напомним, что следом квадратной матрицы A называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали. След матрицы A обозначается так: $tr\ A$. Таким образом, если $A = (a_{ij})$, то

$$tr\ A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Отметим, что поскольку $-tr\ A$ — коэффициент при λ^{n-1} характеристического многочлена $|\ A - \lambda E\ |$ и характеристические многочлены матриц A и $T^{-1}AT$ совпадают, то

$$tr\ A = tr\ T^{-1}AT.$$

Пример **4.12.** *Доказать, что если* $A^m = 0,\ m \geq 1$, *то* $tr\ A = 0$.

Решение. Пусть B — жорданова форма матрицы A, T — невырожденная матрица, для которой $B = T^{-1}AT$. Тогда

$$0 = T^{-1}A^mT = (T^{-1}AT)^m = B^m.$$

Так как B — треугольная матрица и B^m — нулевая матрица, то B также нулевая матрица. В частности, $tr\ B$=0, откуда $tr\ A = tr\ B = 0$.

Пример **4.13.** *Доказать, что если все степени матрицы* A *порядка* n *имеют нулевой след, то* $A^m = 0$ *для некоторого натурального числа* m, $m \geq 1$.

Решение. Пусть B — жорданова форма матрицы A, T — невырожденная матрица, для которой $B = T^{-1}AT$. Считаем, что на главной диагонали матрицы B стоят числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Тогда на главной диагонали матрицы B^k расположены числа $\lambda_1^k, \lambda_2^k, \ldots, \lambda_n^k$. Так как $T^{-1}A^kT = (T^{-1}AT)^k = B^k$, то получаем, что $0 = tr\ A^k = tr\ B^k = 0$. Следовательно,

$$\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 0 \\ \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2 = 0 \\ \ldots \\ \lambda_1^k + \lambda_2^k + \ldots + \lambda_n^k = 0 \end{array}$$

для всех k. Пусть

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$$

— многочлен от $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ — элементарные симметрические многочлены. Индукцией по k при $k \leq n$ несложно доказываются следующие хорошо известные формулы Ньютона:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

Рассматривая значения элементарных симметрических многочленов и степенных сумм на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ и учитывая, что $\sigma_n = x_1x_2\ldots x_n$, получаем, что $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = 0$. Значит, $\lambda_i = 0$ для некоторого i. Индукция по n теперь позволяет утверждать, что все λ_j равны нулю. Таким образом, на главной диагонали матрицы B стоят нули.

Далее непосредственные вычисления показывают, что некоторая степень треугольной матрицы с нулевой главной диагональю нулевая (а именно: $B^n = 0$). Следовательно, соответствующая степень матрицы A — нулевая матрица.

Глава 5

Функции от матриц

Пусть дана числовая функция $f(x)$. Наша ближайшая цель — функции $f(x)$ поставить в соответствие некоторую матричную функцию $f(A)$, т.е. по произвольной матрице A и данной функции $f(x)$ построить некоторую новую матрицу, которую будем обозначать через $f(A)$. Везде считаем, что числовая функция $f(x)$ определена и дифференцируема нужное число раз во всех точках, в которых вычисляются производные.

Пусть

$$J_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}$$

— клетка Жордана размера n.

По определению полагаем:

$$f(J_n) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \cdots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda)}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{f^{(n-3)}(\lambda)}{(n-3)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Если $J(A)$ — матрица, собранная из клеток Жордана, тогда матрица $f(J(A))$ собирается из клеток указанного выше вида аналогично тому, как собирается матрица из клеток Жордана.

Пусть теперь дана произвольная матрица A. Приведем ее к жордановой форме $J(A)$. Тогда $A = TJ(A)T^{-1}$, где T — матрица перехода от первоначального базиса к базису Жордана. На самом деле матрица T^{-1} составлена из координат векторов, входящих в базис Жордана.

По определения полагаем:

$$f(A) = Tf(J(A))T^{-1}.$$

Так как матрица T определяется неоднозначно, то естественно возникает вопрос о корректности определения. Доказательство корректности и подробное разъяснение определения $f(A)$ можно найти в книге [Мальцев, 1975].

Может показаться, что введенное определение функции от матриц выглядит надуманным. Но в действительности оно полностью согласуется с интуитивным представлением функции. Конечно, трудно себе представить, что такое, например, $\cos A$. Однако если $f(x)$ — это некоторый многочлен, то наше определение $f(A)$ совпадает с общепринятым. Отметим также, что при нахождении обратной матрицы обычным способом, например при помощи алгебраических дополнений, и с помощью функции $f(x) = \frac{1}{x}$ получим одно и то же. И если матрица B получена из матрицы A с помощью функции $f(x) = \sqrt{x}$, то $B^2 = A$.

Рассмотрим несколько примеров. Почти все матрицы берутся из примеров предыдущего пункта.

Пример **5.1**.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. *Найти* $\ln A$.

Решение. Выписываем жорданову форму этой матрицы и соответствующую матрицу перехода, найденные в примере 4.3. Напомним, что матрица T^{-1} составлена из координат векторов, входящих в базис Жордана.

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-10}{9} \\ 0 & \frac{3}{9} & \frac{15}{9} \\ \frac{-3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{19}{9} \end{pmatrix}.$$

У нас: $f(x) = \ln x$, $\lambda = 2$ либо 3, $f(2) = \ln 2$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f'(2) = \frac{1}{2}$. Значит,

$$\ln(J(A)) = \begin{pmatrix} \ln 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 3 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем $\ln A$:

$$\ln A = T\ln(J(A))T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-10}{9} \\ 0 & \frac{3}{9} & \frac{15}{9} \\ \frac{-3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{19}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \ln 2 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -5 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 19\ln 2 - 7,5 - 10\ln 3 & 4,5 & 10\ln 2 - 10\ln 3 - 7,5 \\ -15\ln 2 + 15\ln 3 & 9\ln 2 & -15\ln 2 + 15\ln 3 \\ -19\ln 2 + 7,5 + 19\ln 3 & -4,5 & 7,5 - 10\ln 2 + 19\ln 3 \end{pmatrix}.$$

Пример **5.2.** $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *Найти* $\sqrt{A}$.

Решение. Находим жорданову форму матрицы A и матрицу перехода T. Это сделано в примере 4.5.

$$J(A) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $f(x) = \sqrt{x}$, $\lambda = 2$, $f(2) = \sqrt{2}$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$, $f'(2) = \frac{-1}{8\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}}{16}$, то

$$\sqrt{J(A)} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}}{32} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем $\sqrt{A}$:

$$\sqrt{A} = T\sqrt{J(A)}T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{-\sqrt{2}}{32} \\ 0 & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{32} \begin{pmatrix} 47 & -7 & -1 \\ 22 & 26 & -10 \\ 7 & 1 & 23 \end{pmatrix}.$$

Пример **5.3.** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. *Найти* e^A.

Решение. По примеру 4.6 имеем:

$$J(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $f(x) = f'(x) = e^x$, $\lambda = -1$, $f(-1) = f'(-1) = e^{-1}$, следовательно

$$e^{J(A)} = \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Вычисляем e^A :

$$e^A = Te^{J(A)}T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-1} & e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{-1} & e^{-1} & -e^{-1} \\ e^{-1} & 2e^{-1} & -e^{-1} \\ 2e^{-1} & 2e^{-1} & -e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Пример **5.4.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$. *Найти* $\cos A$.

Решение. В примере 4.8 показано, что

$$J(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем: $f(x) = \cos x$, $\lambda = 0$, $f(0) = 1$, $f'(x) = -\sin x$, $f'(0) = 0$, поэтому

$$\cos(J(A)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица.}$$

Отсюда

$$\cos A = T\cos(J(A))T^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример **5.5**.*Найти* $\ln A$*, где* A *— матрица из примера* 5.4.

Решение. В этом примере $f(x) = \ln x$, $\lambda = 0$. Значение $f(0)$ не определено, следовательно, матрица $\ln A$ не определена.

Пример **5.6**. *(*4.3*)*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{\textit{Найти} } arctg\ A.$$

Решение. Сначала находим базис Жордана:

$$e_1^4 = (1,0,0,0), \quad e_1^3 = (1,1,0,0),$$
$$e_1^2 = (1,1,1,0), \quad e_1^1 = (1,1,1,1).$$

Затем вычисляем жорданову форму этой матрицы и соответствующую матрицу перехода T. Напомним, что матрица T^{-1} составлена из координат векторов, входящих в базис Жордана.

$$J(A)=\begin{pmatrix}2&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix},\quad T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}.$$

У нас $f(x)=\operatorname{arctg}\ x$, $\lambda=2$, $f(2)=\operatorname{arctg}\ 2$. Находим производные:
$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $\quad f'(2)=\frac{1}{5}$,
$f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\quad f''(2)=-\frac{4}{25}$,
$f'''(x)=\frac{2(3x^4+2x^2-1)}{(1+x^2)^4}$, $\quad f'''(2)=\frac{22}{125}$.
Значит,

$$\operatorname{arctg}\ (J(A))=\begin{pmatrix}\operatorname{arctg}\ 2&\frac{1}{5}&-\frac{2}{25}&\frac{11}{375}\\0&\operatorname{arctg}\ 2&\frac{1}{5}&-\frac{2}{25}\\0&0&\operatorname{arctg}\ 2&\frac{1}{5}\\0&0&0&\operatorname{arctg}\ 2\end{pmatrix}.$$

Теперь несложно вычислить $\operatorname{arctg} A$:

$$\operatorname{arctg}\ A=T\operatorname{arctg}(J(A))T^{-1}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\operatorname{arctg}\ 2&\frac{1}{5}&-\frac{2}{25}&\frac{11}{375}\\0&\operatorname{arctg}\ 2&\frac{1}{5}&-\frac{2}{25}\\0&0&\operatorname{arctg}\ 2&\frac{1}{5}\\0&0&0&\operatorname{arctg}\ 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\operatorname{arctg}\ 2+\frac{71}{375}&\frac{71}{375}&-\frac{4}{375}&\frac{11}{375}\\-\frac{11}{375}&\operatorname{arctg}\ 2-\frac{11}{375}&\frac{64}{375}&-\frac{41}{375}\\\frac{2}{25}&\frac{2}{25}&\operatorname{arctg}\ 2+\frac{2}{25}&\frac{7}{25}\\-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{1}{5}&\operatorname{arctg}\ 2-\frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Глава 6

Приведение квадратичной формы к каноническому виду ортогональным преобразованием переменных

Квадратичная форма f от n переменных $x_1, \dots, x_n$ — это сумма одночленов степени 2 от этих переменных. Принято квадратичную форму f записывать в следующем виде:

$$f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

где предполагается, что $a_{ij} = a_{ji}$ при всех i, j. Возникшая матрица $A = (a_{ij})$ называется матрицей квадратичной формы f, а ее ранг — рангом квадратичной формы f. Ясно, что A — симметрическая матрица. Если X — столбец, $X' = (x_1, \dots, x_n)$ — строка ($'$ означает транспонирование) переменных, то обычно квадратичную форму f записывают так:

$$f(x_1, \dots, x_n) = X'AX.$$

Если в квадратичной форме $f(x_1, \dots, x_n)$ делается линейное преобразование $X = BY$ переменных с невырожденной матрицей B, то квадратичная форма $f(x_1, \dots, x_n)$ преобразуется в квадратичную форму

$$f_1(y_1, \dots, y_n) = Y'(B'AB)Y.$$

Линейное преобразование $X = BY$ переменных называется ортогональным, если B — ортогональная матрица.

Говорят, что квадратичная форма имеет канонический вид, если ее матрица диагональна.

Теорема **6.1.** *Любая квадратичная форма с действительными коэффициентами может быть приведена к каноническому виду посредством преобразования переменных с ортогональной матрицей.*

Изложим метод приведения квадратичной формы к каноническому виду.

1. Пусть

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

— стандартный ортонормированный базис евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\widetilde{\mathcal{A}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейное преобразование, введенное в главе 1, матрицей которого в базисе $e_1, \ldots, e_n$ служит матрица A. Сначала находим произвольный базис (обозначим его через $a_1, \ldots, a_n$) векторного пространства $\mathbb{R}^n$, состоящий из собственных векторов линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$.

2. При помощи процесса ортогонализации, примененного к базису $a_1, \ldots, a_n$, находим ортонормированный базис $e'_1, \ldots, e'_n$ векторного пространства $\mathbb{R}^n$ из собственных векторов линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$.

3. Пусть

$$e'_1 = \begin{pmatrix} \tau_{11} \\ \vdots \\ \tau_{n1} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} \tau_{12} \\ \vdots \\ \tau_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, e'_n = \begin{pmatrix} \tau_{1n} \\ \vdots \\ \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Если T — матрица перехода от базиса $e_1, \ldots, e_n$ к базису $e'_1, \ldots, e'_n$, то

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \ldots & \tau_{n1} \\ \tau_{12} & \ldots & \tau_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{1n} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то $T' = T^{-1}$. Теперь находим матрицу $T = (\tau_{ij})$.

4. В базисе $e'_1, \ldots, e'_n$ линейное преобразование $\widetilde{\mathcal{A}}$ имеет диагональную матрицу преобразования B с собственными значениями, стоящими на главной диагонали, причем

$$B = T^{-1}AT = T'AT.$$

Следовательно, линейное преобразование $X = TY$ переменных преобразует квадратичную форму $X'AX$ в квадратичную форму $Y'(T'AT)Y = Y'BY$, имеющую канонический вид.

Таким образом, линейное преобразование $X = TY$ является искомым ортогональным преобразованием переменных, приводящим квадратичную форму к каноническому виду, коэффициенты которого — корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$.

Замечание **6.2.** *В изложенном методе мы использовали следующие хорошо известные факты: все корни характеристического многочлена $|A-\lambda E|$ симметрической матрицы A действительные, и существует базис из собственных векторов линейного преобразования $\widetilde{\mathcal{A}}$.*

Замечание **6.3.** *Матрицу перехода T можно находить любым другим способом.*

Замечание **6.4.** *При ортогонализации базиса $a_1, \dots, a_n$ достаточно ортогонализировать каждое множество векторов, относящееся к одному и тому же собственному значению, затем объединить эти множества. В результате получим ортогональную систему векторов.*

Пример **6.5.** *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$$

к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. Находим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем собственные значения матрицы A. Это корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$. Видим, что

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 13\lambda^2 - 32\lambda + 20 = 0.$$

Решив это уравнение, получим собственные значения $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10, \lambda_3 = 2$.

Для каждого собственного значения находим максимальную ортонормированную систему, состоящую из собственных векторов.

Пусть $\lambda = 1$.

Ищем базис пространства решений системы уравнений

$$(A - E)(x_1, x_2, x_3)' = (0, 0, 0)'$$

($'$ — знак транспонирования):

$$(A - E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, находим, что $a_1 = (2, 1, -2)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_1 :

$$e_1' = \frac{1}{|a_1|} a_1 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3})'.$$

Итак, e_1' — часть искомого базиса.

Рассмотрим теперь $\lambda = 10$.

Необходимо найти ортонормированный базис пространства решений системы уравнений

$$(A - 10E)(x_1, x_2, x_3)' = (0, 0, 0)'.$$

Имеем:

$$(A - 10E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -8 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Решаем эту систему уравнений. Получаем, что $a_2 = (-\frac{1}{4}, 1, \frac{1}{4})'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_2:

$$e_2' = \frac{1}{|a_2|}a_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{6}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{6})'.$$

Хорошо известно, что собственные векторы, относящиеся к различным собственным значениям симметрического преобразования, ортогональны. В частности, вектор e_2' ортогонален вектору e_1'. Это также можно проверить непосредственно.

Пусть теперь $\lambda = 2$.

Вычисляем базис пространства решений системы уравнений

$$(A - 2E)(x_1, x_2, x_3)' = (0, 0, 0)'.$$

Видим:

$$(A - 2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} -2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем, что $a_3 = (1, 0, 1)'$ — базис пространства решений рассматриваемой системы уравнений.

Нормируем вектор a_3:

$$e_3' = \frac{1}{|a_3|}a_3 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})'.$$

Вектор e_3' ортогонален векторам e_1', e_2'.

Из координат векторов e_1', e_2', e_3' составляем матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то

$$T = (T^{-1})' = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование имеет вид: $X = TY$.

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

либо

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}y_2 \\ x_3 = -\frac{2}{3}y_1 + \frac{\sqrt{2}}{6}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \end{cases}.$$

Это ортогональное преобразование переменных приводит нашу квадратичную форму к следующему каноническому виду:

$$y_1^2 + 10y_2^2 + 2y_3^2.$$

Пример **6.6.** *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. Сначала находим матрицу этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь вычисляем собственные значения матрицы A. Это корни характеристического многочлена $|A-\lambda E|$. Имеем:

$$|A-\lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -5-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 18\lambda = 0.$$

Решая это уравнение, находим собственные значения рассматриваемой матрицы: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -6$.

Для каждого собственного значения будем искать максимальную линейно независимую систему, состоящую из собственных векторов.

Рассматриваем сначала $\lambda = 0$.

Решаем систему уравнений

$$A(x_1, x_2, x_3)' = (0,0,0)' :$$

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Несложно показать,что $a_1 = (-1, 0, 1)'$ — базис пространства решений этой системы уравнений.

Нормируем вектор a_1:

$$e_1' = \frac{1}{|a_1|} a_1 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})'.$$

Итак, e_1' — часть искомого базиса.

Пусть $\lambda = 3$.

Решаем систему уравнений

$$(A-3E)(x_1, x_2, x_3)' = (0,0,0)' :$$

$$(A-3E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -8 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Легко проверяется, что $a_2 = (2, 1, 2)'$ — базис пространства решений рассматриваемой системы уравнений.

Нормируем вектор a_2:

$$e_2' = \frac{1}{|a_2|} a_2 = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})'.$$

Вектор e_2' ортогонален вектору e_1.

Предположим, что $\lambda = -6$.

Решаем систему уравнений

$$(A + 6E)(x_1, x_2, x_3)' = (0, 0, 0)' :$$

$$(A + 6E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + x3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 7x_3 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что $a_3 = (1, -4, 1)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_3:

$$e_3' = \frac{1}{|a_3|} a_3 = (\frac{1}{\sqrt{18}}, -\frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}).$$

Вектор e_3' ортогонален векторам e_1', e_2'.

Из координат векторов e_1', e_2', e_3' составляем матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{18}} & -\frac{4}{\sqrt{18}} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то

$$T = (T^{-1})' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование имеет вид: $X = TY$.

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{4}{\sqrt{18}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

либо

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{\sqrt{18}} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{3} y_2 - \frac{4}{\sqrt{18}} y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_1 + \frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{\sqrt{18}} y_3. \end{cases}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$3y_2^2 - 6y_3^2.$$

Пример **6.7.** *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$-x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2$$

от трех переменных к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. Выписываем матрицу этой квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A. Это корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$. Отсюда

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1-\lambda & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 - 2\lambda^2 - \frac{3}{4}\lambda = 0.$$

Решив это уравнение, получим собственные значения: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{3}{2}$.

Для каждого собственного значения находим базисы пространств решений соответствующих систем уравнений.

Пусть $\lambda = 0$.

Решаем систему уравнений

$$A(x_1, x_2, x_3)' = (0, 0, 0)'.$$

Видим, что

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a_1 = (0, 0, 1)'$ — базис пространства решений нашей системы уравнений.

Нормируем вектор a_1:

$$e_1' = \frac{1}{|a_1|}a_1 = (0, 0, 1)'.$$

Итак, e_1' — часть искомого базиса.

Рассмотрим $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Надо найти базис пространства решений системы уравнений

$$(A + \frac{1}{2}E)(x_1, x_2, x_3)' = (0, 0, 0)'.$$

Имеем:

$$(A + \frac{1}{2}E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Получаем, что

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0 \\ \frac{1}{2}x_3 = 0. \end{cases}$$

Теперь видим, что $a_2 = (1,1,0)'$ — базис пространства решений рассматриваемой системы уравнений.

Нормируем вектор a_2:

$$e'_2 = \frac{1}{|a_2|}a_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)'.$$

Вектор e'_2 будет ортогонален вектору e'_1.

Пусть теперь $\lambda = -\frac{3}{2}$.

Решаем следующую систему уравнений

$$(A + \frac{3}{2}E)(x_1, x_2, x_3)' = (0,0,0)' :$$

$$(A + \frac{3}{2}E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Значит,

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 0\\ \frac{3}{2}x_3 = 0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что $a_3 = (-1,1,0)'$ — базис пространства решений рассматриваемой системы уравнений.

Нормируем вектор a_3:

$$e'_3 = \frac{1}{|a_3|}a_3 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)'.$$

Вектор e'_3 будет ортогонален векторам e'_1, e'_2.

Из координат векторов e'_1, e'_2, e'_3 составляем матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то

$$T = (T^{-1})' = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование имеет вид: $X = TY$.

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y_3 \\ x_3 = y_3. \end{cases}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$-\frac{1}{2} y_2^2 - \frac{3}{2} y_3^2.$$

Пример **6.8.** *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. Составляем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A. Это корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$. Видим:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & -1 \\ -2 & 5-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = 0.$$

Решаем это уравнение, получаем собственные значения: $\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 7$.

Рассмотрим $\lambda = 1$.

Необходимо решить следующую систему уравнений:

$$(A - E)(x_1, x_2, x_3)' = (0, 0, 0).$$

Имеем:

$$(A-E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&-1\\-2&4&2\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1-2x_2-x_3=0$.

Решая эту систему уравнений, находим, что

$$a_1=(2,1,0)',a_2=(1,0,1)'$$

— базис пространства ее решений.

Далее строим ортогональный базис пространства решений рассматриваемой системы уравнений. Для этого запускаем процесс ортогонализации.

Полагаем $b_1=a_1$, $b_2=c_1b_1+a_2$, где $c_1=-\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}=-\frac{2}{5}$. После вычислений получим:

$$b_1=(2,1,0)',b_2=(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},1)'.$$

Нормируем векторы b_1 и b_2:

$$e_1'=\frac{1}{|b_1|}b_1=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)',$$
$$e_2'=\frac{1}{|b_2|}b_2=(\frac{1}{\sqrt{30}},\frac{-2}{\sqrt{30}},\frac{5}{\sqrt{30}})'.$$

Итак, e_1',e_2' — часть искомого базиса.

Пусть $\lambda=7$.

Необходимо решить следующую систему уравнений:

$$(A-7E)(x_1,x_2,x_3)'=(0,0,0)'.$$

Видим:

$$(A-7E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}-5&-2&-1\\-2&-2&2\\-1&2&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Получаем:

$$\begin{cases}-5x_1-2x_2-x_3=0\\-2x_1-2x_2+2x_3=0\\-x_1+2x_2-5x_3=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a_3 = (1, -2, -1)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_3:

$$e_3' = \frac{1}{|a_3|} a_3 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})'.$$

Вектор e_3' ортогонален векторам e_1', e_2'.

Из координат векторов e_1', e_2', e_3' составляем матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{5}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то

$$T = (T^{-1})' = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование имеет вид: $X = TY$.

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

либо

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \frac{1}{\sqrt{30}} y_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} y_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} y_1 - \frac{2}{\sqrt{30}} y_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} y_3 \\ x_3 = \frac{5}{\sqrt{30}} y_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} y_3. \end{cases}$$

Канонический вид квадратичной формы:

$$y_1^2 + y_2^2 + 7y_3^2.$$

Пример **6.9**. *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_2x_4 + x_3^2 - 2x_3x_4 + x_4^2$$

к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. По данной квадратичной форме составляем ее матрицу A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A. Это корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$. Имеем:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решая полученное уравнение 4-й степени, находим собственные значения: $\lambda_{1,2,3} = 2, \lambda_4 = -2$.

Берем сначала $\lambda = 2$.

Необходимо найти базис пространства решений системы уравнений

$$(A - 2E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0,0,0,0)'.$$

Решаем ее:

$$(A - 2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$.

Теперь находим базис пространства решений этой системы. В качестве искомого базиса можно взять векторы

$$a_1 = (1,1,0,0)', \quad a_2 = (1,0,1,0)' \quad a_3 = (1,0,0,1)'.$$

Далее запускаем процесс ортогонализации.

Полагаем сначала $b_1 = a_1 = (1,1,0,0)'$, затем $b_2 = c_1 b_1 + a_2$, где $c_1 = -\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{1}{2}$. Вектор b_3 имеет вид: $b_3 = c_1 b_1 + c_2 b_2 + a_3$, где $c_1 = -\frac{(a_3,b_1)}{(b_1,b_1)} = -\frac{1}{2}$, $c_2 = -\frac{(a_3,b_2)}{(b_2,b_2)} = -\frac{1}{3}$.

После вычислений получим:

$$b_2 = -\frac{1}{2}a_1 + a_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)', \quad b_3 = -\frac{1}{2}b_1 - \frac{1}{3}b_2 + a_3 = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)'.$$

Нормируем векторы b_1, b_2, b_3:

$$e_1' = \frac{1}{|b_1|}b_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)',$$
$$e_2' = \frac{1}{|b_2|}b_2 = (\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, 0)',$$
$$e_3' = \frac{1}{|b_3|}b_3 = (\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, -\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{3}{2\sqrt{3}})'.$$

Итак, e_1', e_2', e_3' — часть искомого ортонормированного базиса.

Берем теперь $\lambda = -2$.

Ищем базис пространства решений системы уравнений

$$(A + 2E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0, 0, 0, 0).$$

Имеем:

$$(A+2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a_4 = (-1, 1, 1, 1)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_4:

$$e_4' = \frac{1}{|a_4|}a_4 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})'.$$

Вектор e_4' ортогонален векторам e_1', e_2', e_3'.

Из координат векторов e_1', e_2', e_3', e_4' составляем матрицу T^{-1}:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{3}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то

$$T=(T^{-1})'=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование имеет вид: $X=TY$.

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{3}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x_1=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1+\frac{1}{\sqrt{6}}y_2+\frac{1}{2\sqrt{3}}y_3-\frac{1}{2}y_4 \\ x_2=\frac{1}{\sqrt{2}}y_1-\frac{1}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{3}}}y_3+\frac{1}{2}y_4 \\ x_3=\frac{2}{\sqrt{6}}y_2-\frac{1}{2\sqrt{3}}y_3+\frac{1}{2}y_4 \\ x_4=\frac{3}{2\sqrt{3}}y_3+\frac{1}{2}y_4. \end{cases}$$

— искомое ортогональное преобразование.

Искомый канонический вид:

$$2y_1^2+2y_2^2+2y_3^2-2y_4^2.$$

Пример **6.10**. *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$x_1^2-2x_1x_2+6x_1x_3+8x_1x_4+4x_2^2-2x_2x_4-6x_3x_4+x_4^2$$

к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. Составляем матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A. Это корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$. Ищем их:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 4-\lambda & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -\lambda & -3 \\ 4 & -1 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решив полученное уравнение 4-й степени, находим собственные значения: $\lambda_{1,2} = 3, \lambda_3 = 6, \lambda_4 = -6$.

Рассмотрим сначала собственное значение $\lambda = 3$.

Надо найти базис пространства решений системы уравнений

$$(A - 3E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0, 0, 0, 0)'.$$

Видим:

$$(A - 3E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что

$$a_1 = (1, 1, 1, 0)', a_2 = (0, 1, -1, 1)'$$

— базис пространства ее решений.

Далее запускаем процесс ортогонализации.

Полагаем $b_1 = a_1 = (1,1,1,0)'$, $b_2 = c_1 b_1 + a_2$, где $c_1 = -\frac{(a_2,b_1)}{(b_1,b_1)}$. Отсюда выводим, что $b_2 = a_2 = (0,1,-1,1)'$.

Нормируем векторы b_1, b_2:

$$e_1' = \frac{1}{|b_1|} b_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)',$$
$$e_2' = \frac{1}{|b_2|} b_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})'.$$

Итак, e_1', e_2' — часть искомого базиса.

Пусть теперь $\lambda = 6$.

Решаем следующую систему уравнений:

$$(A - 6E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0,0,0,0)'.$$

Имеем:

$$(A - 6E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -6 & -3 \\ 4 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -5x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a_3 = (-1,1,0,-1)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_3:

$$e_3' = \frac{1}{|a_3|} a_3 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{3}})'.$$

Вектор e_3' ортогонален векторам e_1', e_2'.

Пусть $\lambda = -6$.

Нужно решить следующую систему уравнений:

$$(A + 6E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0,0,0,0)'.$$

Видим:

$$(A+6E)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow\begin{pmatrix}7&-1&3&4\\-1&10&0&-1\\3&0&6&-3\\4&-1&-3&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases}7x_1-x_2+3x_3+4x_4=0\\-x_1+10x_2-x_4=0\\3x_1+6x_3-3x_4=0\\4x_1-x_2-3x_3+7x_4=0.\end{cases}$$

Решая эту систему, находим, что $a_4 = (1,0,-1,-1)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_4:

$$e_4'=\frac{1}{|a_4|}a_4=(\frac{1}{\sqrt{3}},0,-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}})'.$$

Вектор e_4' ортогонален векторам e_1', e_2', e_3'.

Из координат векторов e_1', e_2', e_3', e_4' составляем матрицу T^{-1}:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то

$$T=(T^{-1})'=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование имеет вид: $X = TY$.

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

либо

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_4 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_4 \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{3}}y_3 - \frac{1}{3}y_4. \end{cases}$$

Искомый канонический вид квадратичной формы равен:

$$3y_1^2 + 3y_2^2 + 6y_3^2 - 6y_4^2.$$

Пример **6.11**. *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2^2 - 6x_2x_3 + 2x_2x_4 + 6x_3^2 + 2x_3x_4 + 4x_4^2$$

к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. Находим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Находим собственные значения матрицы A. Это корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$. Имеем:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 6-\lambda & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 6-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляя этот определитель и решая полученное уравнение 4-й степени, находим собственные значения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 5, \lambda_4 = 10$.

Рассмотрим сначала $\lambda = 1$.

Необходимо решить следующую систему уравнений:

$$(A-E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0,0,0,0)'.$$

Видим:

$$(A-E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 = \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

После решения этой системы уравнений получаем, что $a_1 = (4, 1, -1, 0)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_1:

$$e_1' = \frac{1}{|a_1|}a_1 = (\frac{4}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, -\frac{1}{3\sqrt{2}}, 0)'.$$

Итак, e_1' — часть искомого ортонормированного базиса.

Пусть $\lambda = 2$.

Рассмотрим систему уравнений:

$$(A-2E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0,0,0,0)'.$$

Имеем:

$$(A-2E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что $a_2 = (0, 1, 1, -1)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_2:

$$e_2' = \frac{1}{|a_2|} a_2 = (0, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})'.$$

Вектор e_2' ортогонален вектору e_1'.

Пусть $\lambda = 5$.

Надо найти базис пространства решений системы уравнений

$$(A - 5E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0, 0, 0, 0)'.$$

Видим:

$$(A - 5E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему, находим, что $a_3 = (0, 1, 1, 2)$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_3:

$$e_3' = \frac{1}{|a_3|} a_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})'.$$

Вектор e_3' ортогонален векторам e_1', e_2'.

Пусть теперь $\lambda = 10$.

Необходимо найти базис пространства решений следующей системы уравнений:

$$(A - 10E)(x_1, x_2, x_3, x_4)' = (0, 0, 0, 0)'.$$

Имеем:

$$(A - 10E) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -8 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -8x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем, что $a_4 = (1, -2, 2, 0)'$ — базис пространства ее решений.

Нормируем вектор a_4:

$$e_4' = \frac{1}{|a_4|} a_4 = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0)'.$$

Вектор e_4' ортогонален векторам e_1', e_2', e_3'.

Из координат векторов e_1', e_2', e_3', e_4' составляем матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то

$$T = (T^{-1})' = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование имеет вид: $X = TY$.

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Искомый канонический вид квадратичной формы:

$$y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 + 10y_4^2.$$

Пример **6.12**. *Найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму*

$$-4x_1^2 + 10x_1x_2 - 4x_2^2.$$

к каноническому виду, и написать этот канонический вид.

Решение. Находим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем собственные значения матрицы A. Это корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$. Имеем:

$$|A - \lambda E| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 + 8\lambda - 9 = 0.$$

Решив это уравнение, найдем собственные значения: $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -9$.

Сначала рассмотрим собственное значение $\lambda = 1$.

Необходимо найти базис пространства решений системы уравнений

$$(A - E)(x_1, x_2)' = (0, 0)'.$$

Видим:

$$(A - E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0. \end{cases}$$

Несложно заметить, что $a_1 = (1, 1)'$ — базис пространства решений этой системы уравнений.

Нормируем вектор a_1:

$$e_1' = \frac{1}{|a_1|}a_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})'.$$

Итак, e_1' — часть искомого ортонормированного базиса.

Пусть теперь $\lambda = -9$.

Надо найти базис пространства решений следующей системы уравнений:

$$(A + 9E)(x_1, x_2)' = (0, 0)'.$$

Видим:

$$(A + 9E)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $5x_1 + 5x_2 = 0$.

Легко проверить, что $a_2 = (1, -1)'$ — базис пространства решений рассматриваемой системы уравнений.

Нормируем вектор a_2:

$$e_2' = \frac{1}{|a_2|}a_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})'.$$

Вектор e_2' ортогонален вектору e_1'.

Из координат векторов e_1', e_2' составляем матрицу T^{-1}:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Так как T — ортогональная матрица, то

$$T = (T^{-1})' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Искомое ортогональное преобразование имеет вид: $X = TY$.

Выпишем его в явном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

либо

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_2. \end{cases}$$

Найденным ортогональным преобразованием переменных данная квадратичная форма приводится к следующему виду:

$$y_1^2 - 9y_2^2.$$

Библиографический список

1. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.— М.: Наука, 1987.

2. Воеводин В.В. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1974.

3. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре. — М.: Наука, 1975.

4. Кострикин А.И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.

5. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. — М.: Физматгиз, 1963.

6. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. — М.: Наука, 1975.

7. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Физматгиз, 1962.

8. Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих олимпиад по математике. — М.: Наука. 1978.

9. Сборник задач по алгебре: Учеб. пособие/ Под ред. А.И. Кострикина. — М.: Наука. 1987.

10. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1972.